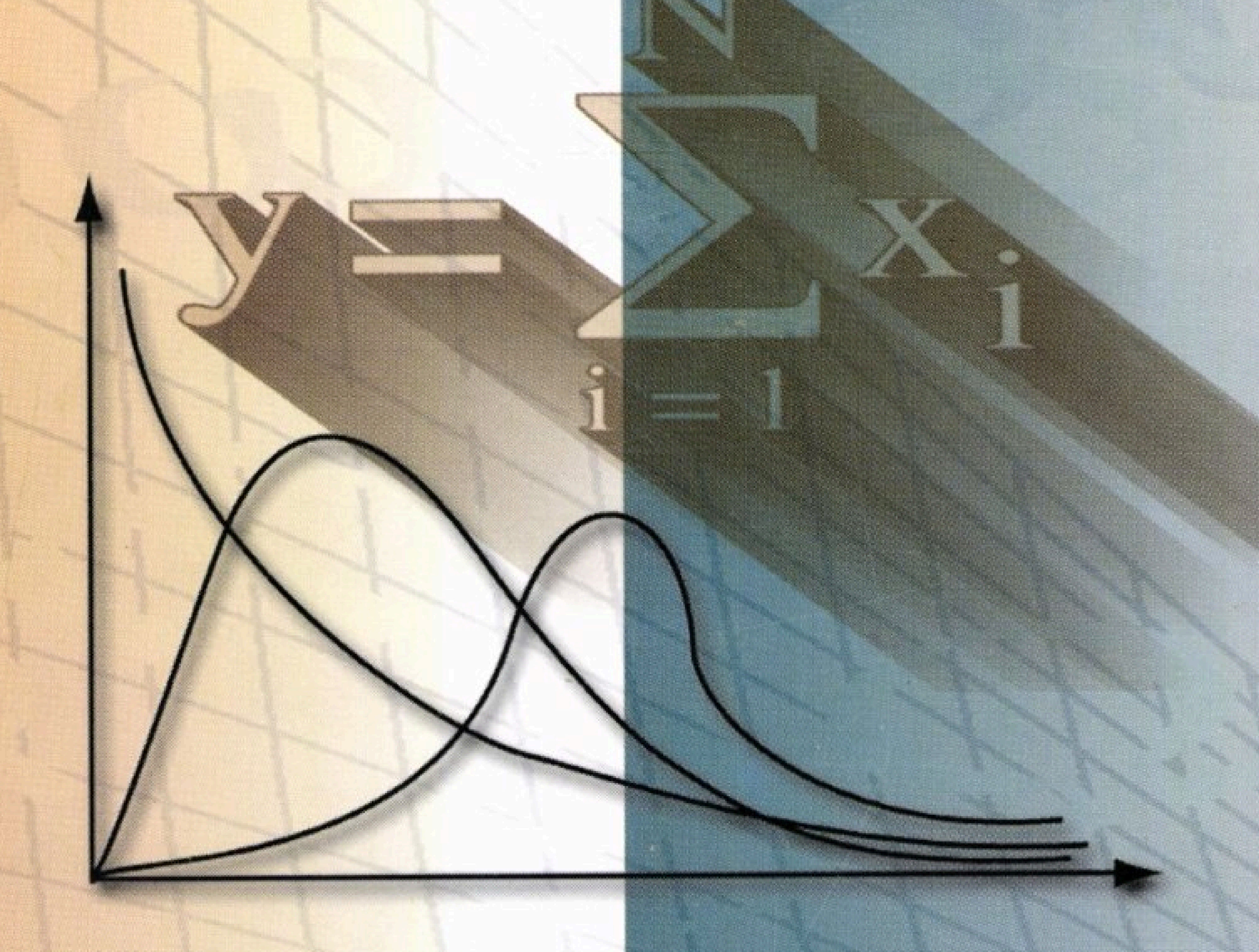
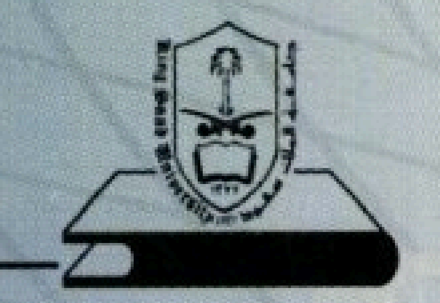
نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها



تأليف

الدكتور محمد بن إبراهيم عقيل

الدكتور عبد الرحمن بن محمد أبو عمه



النشر العلمي و المطابع

جامعة الملك سعود



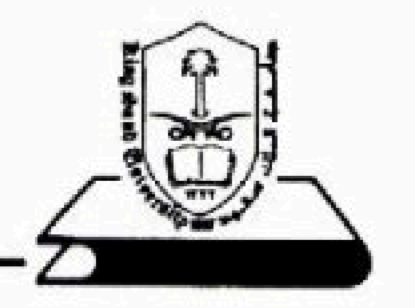

الله
بسم الله الرحمن الرحيم

نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها

تأليـــف

د. محـمـد بن إبراهيـم عقيـل
الأستاذ المشارك بقسم الرياضيات
كلية التربية بأبها
جامعة الملك خالد

د. عبدالرحمن بن محمد أبو عمه
الأستاذ بقسم الإحصاء وبحوث العمليات
كلية العلوم بالرياض
جامعة الملك سعود



النشر العلمي والمطابع ـ جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ الرياض ١١٥٣٧ ـ المملكة العربية السعودية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

عقيل، محمد إبراهيم

نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها. محمد إبراهيم عقيل؛ عبدالرحمن محمد أبو عمه
- الرياض

٥٨٥ ص، ١٧×٢٤سم

ردمك: ٠-٥٥-٠٠-٣٧-٩٩٦٠

١- الاحتمالات (رياضيات) - نظريات أ - أبو عمه، عبدالرحمن محمد (م. مشارك) ب- العنوان

ديوي ٥١٩,٢ ٢٠/٣٦٨٩

رقم الإيداع: ٢٠/٣٦٨٩

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة، شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس العلمي على نشره - بعد اطلاعه على تقارير المحكمين - في اجتماعه العاشر للعام الدراسي ١٤١٨/١٤١٩هـ الذي عقد بتاريخ ١٨/١٠/١٤١٨هـ الموافق ١٥/٢/١٩٩٨م.



النشر العلمي والمطابع ١٤٢١هـ/ ٢٠٠٠م

المقدمة

لقد كان الدافع وراء عزمنا في إعداد هذا الكتاب هو قلة الكتب المتوافرة في الاحتمالات باللغة العربية أولاً، وثانيًا شعورنا بحاجة الطالب العربي الشديدة إلى كتاب يغطي حاجته الأساسية من هذا العلم.

حاولنا أن يكون الكتاب شاملاً لجميع الموضوعات الأساسية، ويعتمد على التسلسل المتعارف عليه في عرض موضوعاته، وتكثر فيه الأمثلة والتمارين وتتنوع في تطبيقاتها. ولا يحتاج الكتاب إلى خلفية كبيرة في علم الرياضيات عدا مقرر أو ما يعادله على المستوى الجامعي. وقد لاحظنا أن غالبية الخلفية المطلوبة لهذا الكتاب في الرياضيات سبق للطالب أن درسها في مقرر رياضيات الصف الثالث الثانوي في كل الدول العربية تقريبًا؛ لذا فإن الكتاب يلبي حاجة الدارسين من طلابنا وطالباتنا من المبتدئين في علم الإحصاء، والاحتمالات، وبحوث العمليات، والرياضيات، بالإضافة إلى سد حاجة غير المختصين من الباحثين والزملاء في العلوم التطبيقية الأخرى التي تعتمد على علم الاحتمالات مثل: الهندسة، والإدارة، والطب، والعلوم الإنسانية.

يحتوي الكتاب على تسعة فصول، وينقسم كل فصل إلى عدد من البنود الرئيسة والبنود الفرعية حسب الحاجة، كما هو واضح من قائمة محتويات الكتاب. بالإضافة إلى فهرس المصطلحات باللغة العربية واللغة الإنجليزية وكشاف بالمصطلحات باللغة العربية واللغة الإنجليزية، وذلك بعد قائمة شاملة لجميع

المراجع العربية والإنجليزية التي استفدنا منها ولو بطريقة غير مباشرة في تأليف الكتاب.

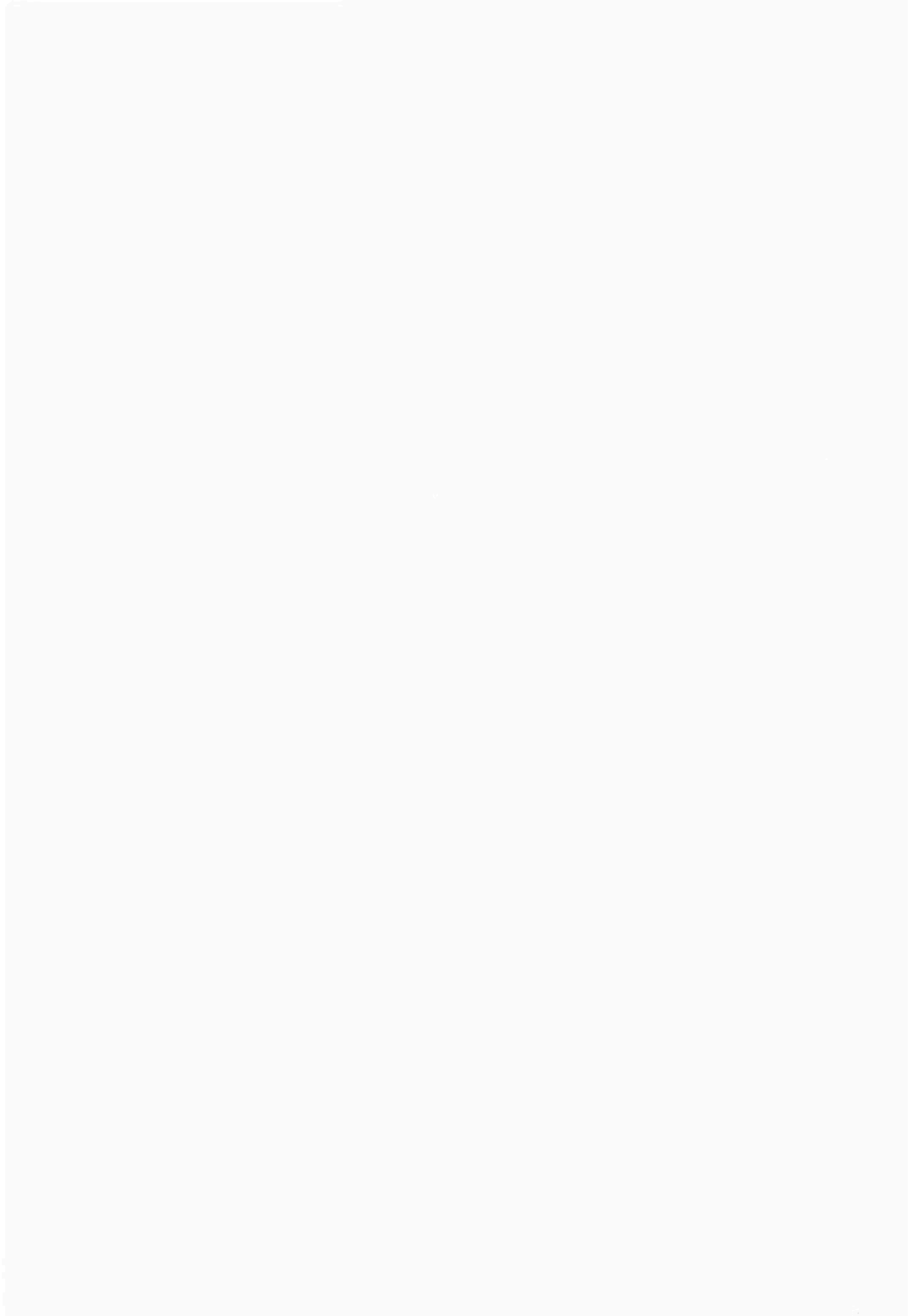
استخدمنا اللغة الإنجليزية في عرض المعادلات، كما أثبتنا المصطلح الإنجليزي مع مرادفه العربي عند ظهوره لأول مرة، وقد أعدناه أحيانًا لتذكير القارىء، وذلك بعد عدة صفحات من ظهوره للمرة الأولى. وينحصر هدفنا في ذلك في زيادة ثروة القارىء اللغوية من الإنجليزية بالمصطلحات الضرورية حتى يتمكن فيما بعد من مواصلة قراءاته في مراجع الكتب في نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها باللغة الإنجليزية.

أخيرًا نود أن نشكر كل من ساعدنا من الزملاء بالنقد أو التصحيح أو التصويب، كما نشكر طلبتنا الذين تساءلوا عن موضوع أو شككوا في صحة برهان أو لمزوا غبطة إلى عدم استقامة نص مما أدى إلى ظهور الكتاب بصورته الحالية.

ختامًا نسأل الله أن ينفعنا بما علمنا، وأن يبارك لنا جميعًا فيما عملنا، وأن يغفر لنا عما تجاوزنا إنه هو الغفور الرحيم، وأن يجعل الله سبحانه وتعالى كتابنا هذا في موازين أعمالنا الصالحة وأجر المجتهدين آمين.

المؤلفان

المحتويات



الفصل الأول

المجموعات

المجموعات

قبل البدء في الحديث عن الاحتمال ونظرياته سوف نتعرض، ولكن بشيء من الإيجاز، لبعض المفاهيم والتعريفات الأساسية في نظرية المجموعات (sets) ذات الصلة الوثيقة بعلم الاحتمال التي قد تساهم في توضيح المفهوم العلمي للاحتمال، وتيسر فهمه وتبسط استيعابه للقارىء.

١,١ المجموعة

المجموعة هي تجمّع من الأشياء (objects) محددا تحديدا واضحا ومعرفا تعريفا جيدا.

والمقصود بذلك التعريف هو أن يكون ذلك التجمع من الأشياء معـروفـا جيدا، وعادة ما يحدد بقوسين، ويحتوي على كل الخصائص المشتركة والمميـزة لعناصر ذلك التجمع. تسمى الأشياء التي بداخل المجموعة عناصر المجـمـوعـة (elements) ويرمز عادة للمجموعة بحروف لاتينية كبـيـرة مـثـل ... ,A, B, C ولعناصرها بحروف لاتينية صغيرة مثل ... ,a, b, c . إذا كان العنصر a ينتمي إلى المجموعـة A فيشار لذلك بالرمـز $a \in A$ ، وإذا كان العنصر لاينتمي إلـى المجموعة فنكتب الرمـز $a \notin A$. يوجد الكثير من الأمثلة على المجموعـات؛ فعلى سبيل المثال لا الحصر، نذكر مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من العدد 7 ، مجموعة النتائج الممكنة عند رمي قطعة نقود معدنيـة مـرة واحـدة، مجموعة كليات جامعة الملك سعود، مجموعة الكتب في المكتبة المركزية، مجموعة الدول الإسلامية، مجموعة الدول المصدرة للبترول.

٢ , ١ طرق كتابة المجموعة

توجد عدة طرق لوصف المجموعات نذكر منها الطريقتين التاليتين:

١ , ٢ , ١ طريقة الحصـر

في طريقة الحصر (Roster method) نكتب كل عناصر المجموعة صراحة بين قوسين كبيرين { } ومن أمثلة ذلك :

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

B = { ابن ، ابنة }

$C = \{H, T\}$

$D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$

٢ , ٢ , ١ طريقة الوصف أو القانون

نحدد في طريقة الوصف أو القانون (Rule method) عناصر المجموعة بصفة وحيدة أو بعدد من الصفات التي تحققها عناصر هذه المجموعة، ومن الأمثلة على ذلك:

$I = \{x :$ عدد صحيح موجب أقل من 7 $: x\}$

$E = \{x :$ عدد زوجي $: x\}$

$O = \{x :$ عدد فردي أقل من12 $: x\}$

$C = \{x :$ خليفة من الخلفاء الراشدين $: x\}$

$P = \{x :$ ركن من أركان الإسلام $: x\}$

$S = \{x :$ مصدر من مصادر الشريعة الإسلامية $: x\}$

$A = \{x :$ نقطة على خط مستقيم $: x\}$

$$B = \{ x : x \in]0, 1[\}$$

$$D = \{ x : 0 \leq x \leq 1 \}$$

وبصورة عامة، إذا كان ينتمي إلى المجموعة A عنصر ما x ويحقق مجموعة من الصفات أوالخصائص q(x) فإنه يمكننا كتابة المجموعة A كالتالي:

$$A = \{ x : x \in q(x) \}$$

فمثلا إذا كانت $q(x) =]0, 1[$ فإنه يمكن كتابة المجموعة A بطريقة الوصف التالية :

$$A = \{ x : x \in q(x) \} = \{ x : x \in]0, 1[\} = \{ x : 0 < x < 1 \}$$

٣ , ١ المجموعة الجزئية

إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة A ينتمي إلى المجموعة B، فيقال إن المجموعة A مجموعة جزئيــة (subset) من المجموعة B . أو أن المجموعــة B تحتوي (contains) المجموعة A، ويرمز لذلك بالرمزين التاليين :

$B \supset A$ أو $A \subset B$

أما إذا كانت المجموعة A ليست مجموعة جزئية من المجموعة B ، أي أن المجموعة B لاتحتوي على كل عناصر المجموعة A ، فيستخدم لهذا التعبير الرمز $A \not\subset B$.

ليكن لدينا المجموعات التالية :

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \ ,$$

$B = \{1, 3, 5\}$,

$C = \{2, 4, 6\}$.

نلاحظ أن المجموعتين B , C مجموعتان جزئيتان من المجموعة A؛ أي أن $B \subset A$ و $C \subset A$ بينما المجموعة C ليست مجموعة جزئية من B وكذلك B ليست جزئية من C؛ أي أن $B \not\subset C$ و $C \not\subset B$.

إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B، وكانت المجموعة A لاتحتوي على كل عناصر المجموعة B، فيقال إن المجموعة A في هذه الحالة مجموعة جزئية فعلية (proper subset) أي أن:

$$A \subset B \ , \ A \neq B$$

ومن ذلك يمكن القول بأن المجموعتين B , C مجموعتان جزئيتان فعليتان من المجموعة A .

نستخدم الرمز n(A) للدلالة على عدد عناصر المجموعة A القابلة للعد. نلاحظ أن المجموعةA مجموعة جزئية من نفسها، أما إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية (أو جزئية فعلية) من المجموعة B، أي أن $A \subset B$ فإن:

$$n(A) \leq n(B)$$

حيث إن الرمز n(A) يرمز لعدد عناصر المجموعة A، وn(B) يرمز لعدد عناصر المجموعة B .

٤ , ١ التساوي

إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية من B، وكانت المجموعة B مجموعة جزئية من A فإن المجموعتين A , B مجموعتان متساويتان (equals)، ويرمز لهما بالرمز $A = B$. وبعبارة أخرى يقال إن المجموعتينA , B متساويتان إذا كان لهما نفس العناصر؛ أي أن:

$$A \subset B \, , B \subset A \ \Leftrightarrow \ A = B$$

إذا كانت $A = \{x : 0 \leq x \leq 1\} \ , B = \{x : -1 \leq x \leq 2\}$

فإن المجموعة ، ذات البعد الواحد A مجموعة جزئية فعلية من المجموعة ذات البعد الواحد B؛ أي أن $A \subset B$ ولكن $A \neq B$.

وإذا كانت

$$A = \{ (x , y) : 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 \},$$
$$B = \{ (x , y) : 0 \leq x = y \leq 1 \},$$
$$C = \{ (x , y) : (x , y) = (0 , 0) , (1 , 0) , (0 , 1) , (1 , 1) \} .$$

من الملاحظ أن عناصر المجموعة B تمثل نقاطا تقع على أحد قطري المربع، ويمكننا القول أن B هي مجموعة جزئية فعلـيـة مـن A؛ أي أن $A \neq B , B \subset A$ بينمـا المجموعتان B, C مجموعتان غير متساويتين؛ أي أن:

$$B \not\subset C , C \not\subset B \ \Leftrightarrow \ B \neq C$$

وهما يمثلان القطر الواصل بين الـرأسـين (0,0) و (1,1) وإحداثيات الرؤوس في المربع على الترتيب. كما نرمز بالـطـرح A - B لمجموعة تحتوي على عنـاصـر موجودة في A وغير موجودة في B.

٥ , ١ المجموعة الخالية

تسمى المجموعة التي لايوجد فيها عناصر مطلقا بالمجموعة الخاليـة (empty set) أو المجموعة الفارغة (null set) ونرمز لها بالرمزΦ ، وينطق «فاي»، أو "{ }" وأحيانا يرمز لها بالرمز "0". يجب ملاحظة أن الرمز { 0} لايعني مجموعة خالية، وإنما يرمز لمجموعة تحتوي على عنصر واحد هو الصفر. تـعـدّ المجموعة الخاليـة مجموعة جزئية من أي مجموعة؛ أي أنه إذا كان لدينا مجموعة A فإن من خواص المجموعة الخالية ما يلي:

$$\Phi \subset A$$

ومن أمثلة المجموعات الخالية: مجموعة الطلبة في المرحلة الثانوية الذيـن تـقـل أعمارهم عن ست سنوات، ومجموعة الدول العربية في الأمم المتحـدة الـذيـن يملكون حق النقض، ومجموعة الطلاب في كليات البنات، . . . وهكذا.

٦ , ١ المجموعة الشاملة

تسمى المجموعة التي تحتوي على كل العناصر مجموعـــة شاملة (universal set) ويرمز لها بالرمز S، أو بعبارة أخرى هي المجموعة التي تحتوي على كل العناصر الممكنة. وتعتبر المجموعة الشاملـة S مجموعة جزئية من نفسها. إذا كان لدينـا مجموعة شاملة S تحتوي على n من العناصر فإنه يمكن تعريف 2^n مجموعة جزئية من S . يمكن ملاحظة أن المجموعتين Φ , S مجموعتان جزئيتان من S؛ أي أن:

$$S \subset S \quad , \quad \Phi \subset S$$

٧ , ١ المجموعة المكملة

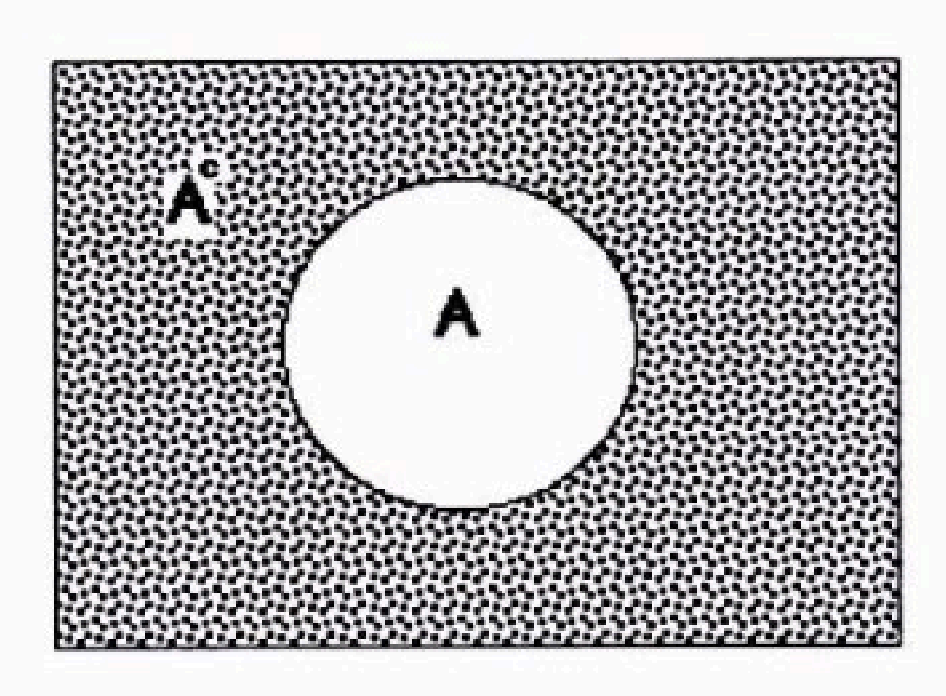
إذا كانت S مجموعة شاملة وكانت A مجموعة جزئية من S ، فإن المجموعة S - A تسمى بمكملة (complement) المجموعة A، وهي المجموعة التي تحتوي على العناصرالموجودة في S ولاتنتمي إلى المجموعة A ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$ أو A^c ، ويمكن التعبير عنها رياضيا كما يلي :

$$\overline{A} = A^c = \{ x : x \in S ; x \notin A \}$$

للمجموعة المكملة جملة خواص ومنها:

(أ) $\overline{S} = \Phi \; , \; \overline{\Phi} = S$

(ب) مكملة المجموعة المكملة هي المجموعة الأصلية؛ أي أن: $(A^c)^c = A$



الشكل رقم (١ , ١). المجموعة المكملة

مثال ١ , ٧ , ١

رمي حجرنرد وكانت المجموعة المكونة من كل النتائج الممكنة هي S حيث إن

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

وكانت A , B مجموعتين جزئيتين معرفتين على S كما يلي :

A = { مجموعة الأعداد الزوجية } = { 2 , 4 , 6 }

B = { مجموعة الأعداد الفردية } = { 1 , 3 , 5 }

من الملاحظ أن :

$$\overline{S} = \Phi$$

$$\overline{A} = \{x : x \in S ; x \notin A\} = B$$

$$\overline{B} = \{x : x \in S ; x \notin B\} = A$$

يمكن التعبير عن ذلك ببعض العلاقات كما يلي :

$$\forall\ A, B \subset S\ ,\ A \cap B = \Phi \Rightarrow$$

$$\overline{A} = B\ ,\ \overline{B} = A,$$

$$A \cup \overline{A} = S\ ,\ A \cup S = S,$$

$$\overline{A} = A\ ,\ A \cap B = \Phi$$

١ , ٨ العمليات الجبرية على المجموعات

إذا كانت المجموعتان A , B مجموعتين جزئيتين معرفتين على المجموعـة S ‏($A , B \subset S$)، فإن من السهل وضع هذه المجموعات في صور مختلفة للحصول على مجموعات جديدة والتي تكون بدورها مجموعات جزئية من المجموعة S .

من العمليات (operations) الجبرية الأساسية على المجموعات التي سوف نتعرض لها في دراسة الاحتمال : الاتحـاد (union)، والتقاطـع (intersection)،

والاختلاف أو الفرق (difference).

١,٨,١ الاتحاد أو الجمع

اتحاد مجموعتين A, B معرفتين على S هو مجموعة ثالثة يرمز لها بالرمز $A \cup B$ أو $(A + B)$ وتحتوي كل عناصر المجموعة A وكل عناصر المجموعة B، وتسمى المجموعة $A \cup B$ أو $(A + B)$ أحيانا بجمع المجموعتين A,B أو اتحادهما. أو بعبارة رياضية :

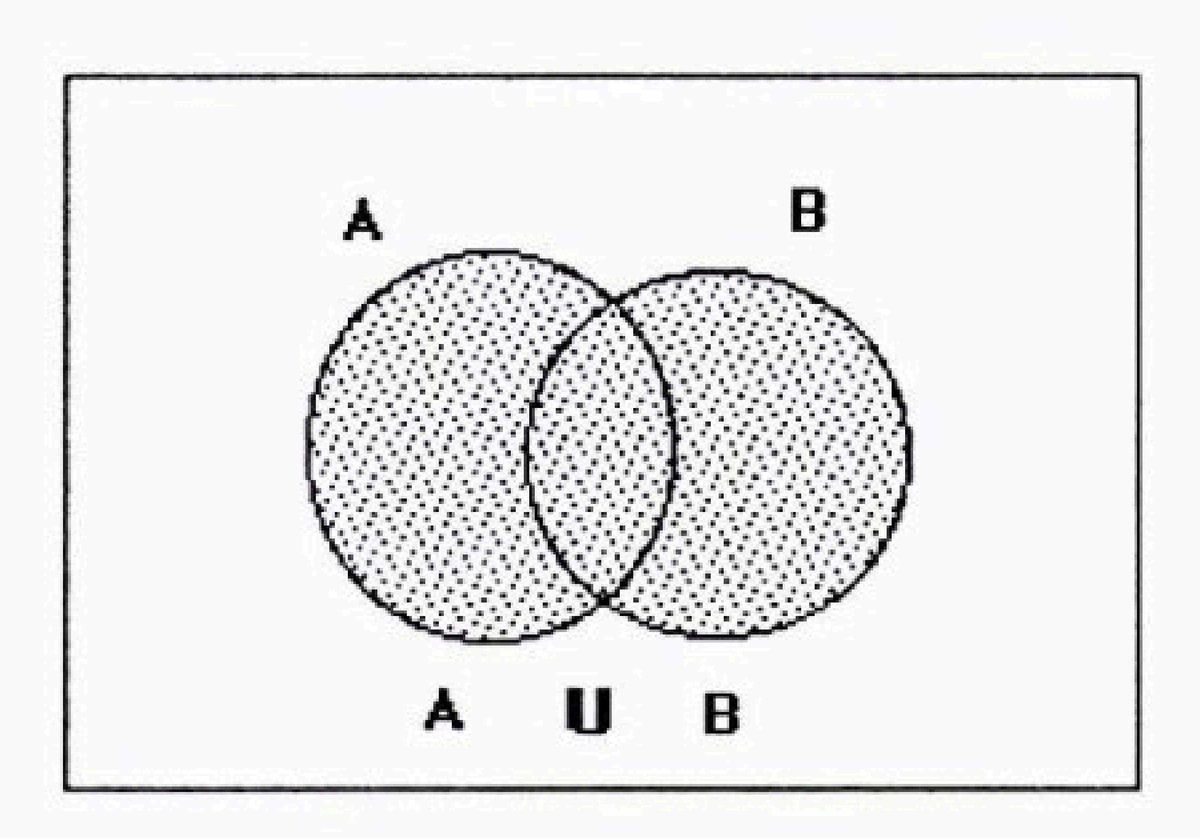
$$A \cup B = A + B = \{ x : x \in A \ v \ x \in B \}$$

حيث الرمز v يقرأ « أو » ؛ فمثلا إذا كان لدينا

$$A = \{ x : 0 \le x \le 1 \} \quad , \quad B = \{ x : -1 \le x \le 2 \}$$

فإنه من الملاحظ أن :

$$A \cup B = \{ x : x \in A \ \text{أو} \ x \in B \} = \{ x : -1 \le x \le 2 \} = B$$



الشكل رقم (١,٢). اتحـاد مجموعتيـن

من تعريف الاتحاد لمجموعتين يمكننا إعطاء التعميم التالي :

اتحاد عدد من المجموعات (لانهائي) ... , A_1 , A_2 , A_3 هو مجموعة تحتوي كل العناصر التي تنتمي - على الأقل - إلى مجموعة من المجموعات

أي أن : $A_1 , A_2 , A_3 , \ldots$ ؛

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad , i = 1, 2, 3, \ldots$$

وإذا كان عدد المجموعات نهائيا فإن اتحادها هو :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad , i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

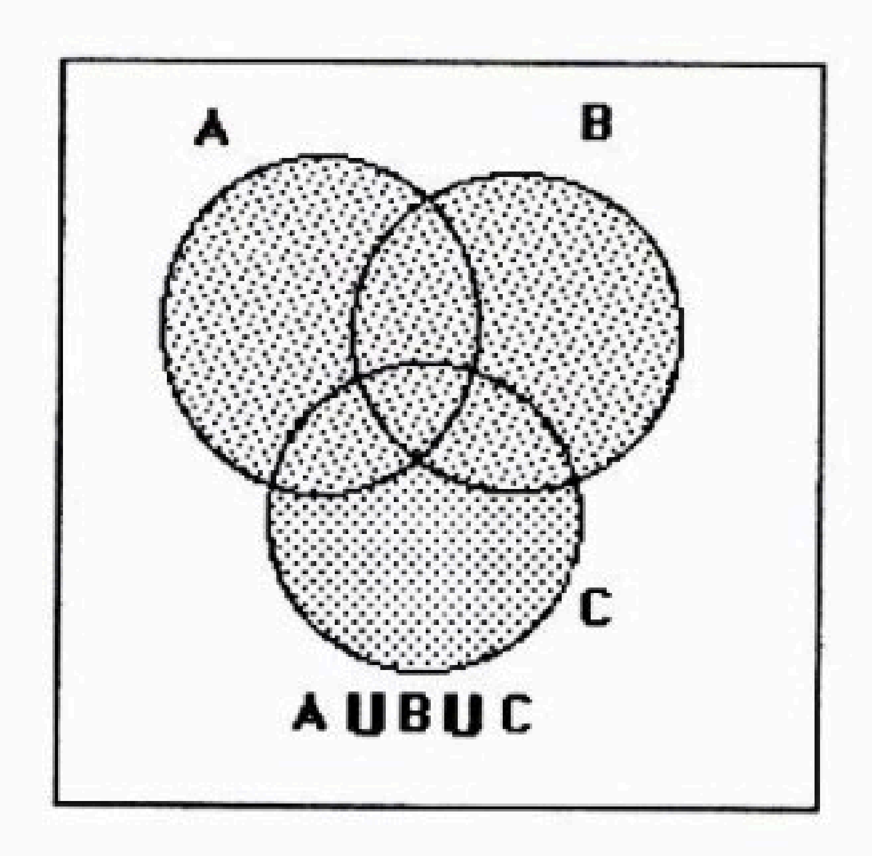
مثال ١ , ٨ , ١

إذا كان لدينا عدد لانهائي من المجموعات معرف كما يلي :

$$A_k = \left\{ x : \frac{1}{k+1} \leq x \leq 1 \right\} \quad , \quad \forall \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

فإن
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_i = \{ x : 0 < x < 1 \}$$

يمكن ملاحظة أن العدد 0 لاينتمي إلى هذه المجموعة لأنه ليس عنصرا في $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i$.



الشكل رقم (٣ , ١). اتحاد ثلاث مجموعات

خواص عملية الاتحاد أو الجمع

(أ) الخاصية الإبداليــة (cumulative): لأي مجموعتــين A, B معرفتين على S فإن

$$A \cup B = B \cup A \; .$$

(ب) الخاصية التجميعية (associative): لأي ثلاث مجموعات A, B, C معرفة على S فإن

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$$

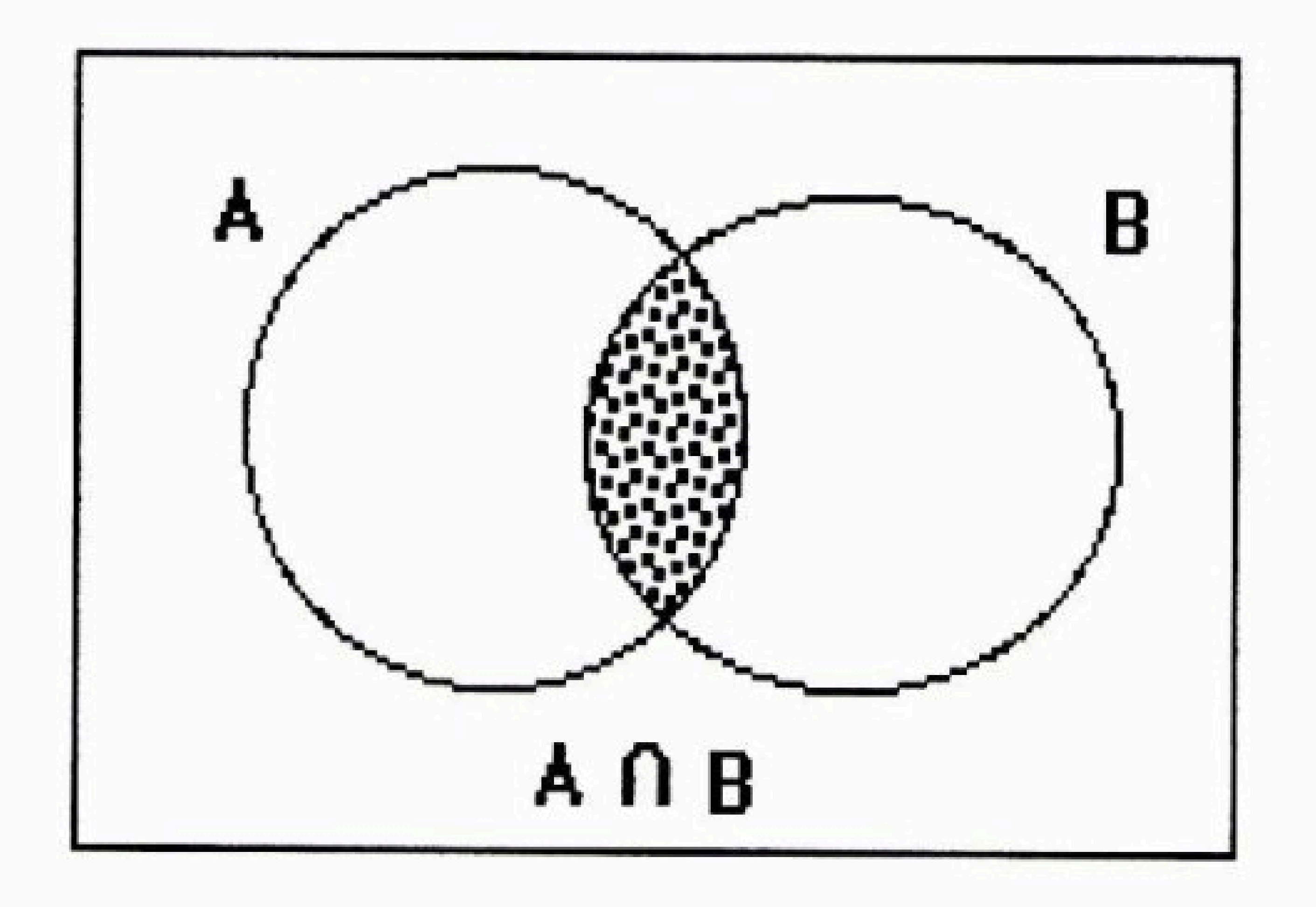
(جـ) لأي مجموعة A معرفة على المجموعة S فإن :

$$A \cup A = A \quad , \quad A \cup S = S \quad , \quad A \cup \Phi = A$$

(د) خاصية التكميل (complementation): لأي مجموعة A معرفة على S فإنه يوجد مكملة $\overline{A}$ بحيث إن $A \cup \overline{A} = S$.

١,٨,٢ التقاطع

إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين معرفتين على المجموعة S، فإنه توجد مجموعة ثالثة يرمز لها بالـرمـز $A \cap B$ ، وهي المجموعةالتي تحتوي على كـل العناصر المشتركة بين المجموعـتـين A, B ، ولاتحتوي على أي عناصر أخـرى، وتسمى هذه المجموعة بتقاطع (intersection) وهو الاصطلاح الشائع، أو أحيانا تسمى بضرب المجموعتين A, B وبعبارة أخرى يمكن كتابة$A \cap B$ كما يلي :



الشكل رقم (٤ , ١). تقاطع مجموعتين

$$A \cap B = \{ x : x \in A \wedge x \in B \}$$

يقرأ الرمز "$\wedge$" « و». يستخدم أحيانا الرمز AB للدلالة على $A \cap B$ وقد يشار إلى AB في هذه الحالة أحيانا بضرب المجموعتين A , B . فمثلا إذا كان لدينا

$$A = \{ (x , y) : (x , y) = (0 , 0) , (0 , 1) , (1 , 1) \}$$

$$B = \{(x , y) : (x , y) = (1 , 1) , (1 , 2) , (2 , 1) \}$$

فإن:

$$A \cap B = \{ x : x \in A , x \in B \} = \{ (x , y) : (x , y) = (1 , 1) \}$$

وإذا كانت A , B معرفتين كما يلي:

$$A = \{ (x , y) : 0 \leq x + y \leq 1 \}$$

$$B = \{ (x , y) : 1 < x+y \}$$

فإن من الملاحظ أن المجموعتين A , B لاتحتويان على عناصر مشتركة فيما بينهما؛ أي أن $A \cap B = \Phi$. وإذا تحقق ذلك الشرط تسمى المجموعتان A , B مجموعتين منفصلتين (disjoint sets).

يمكن تعميم تعريف تقاطع مجموعتين إلى تقاطع عدد نهائي أو لانهائي من المجموعات. تقاطع عدد لانهائي من المجموعـات... , A_1 , A_2 هو مجموعة العناصر التـي تنتمي إلى كل مجموعة من المجموعات ... , A_1 , A_2 ويرمز لها بالرمز

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

أما إذا كان التقاطع لعدد نهائي من المجموعات فنكتب :

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

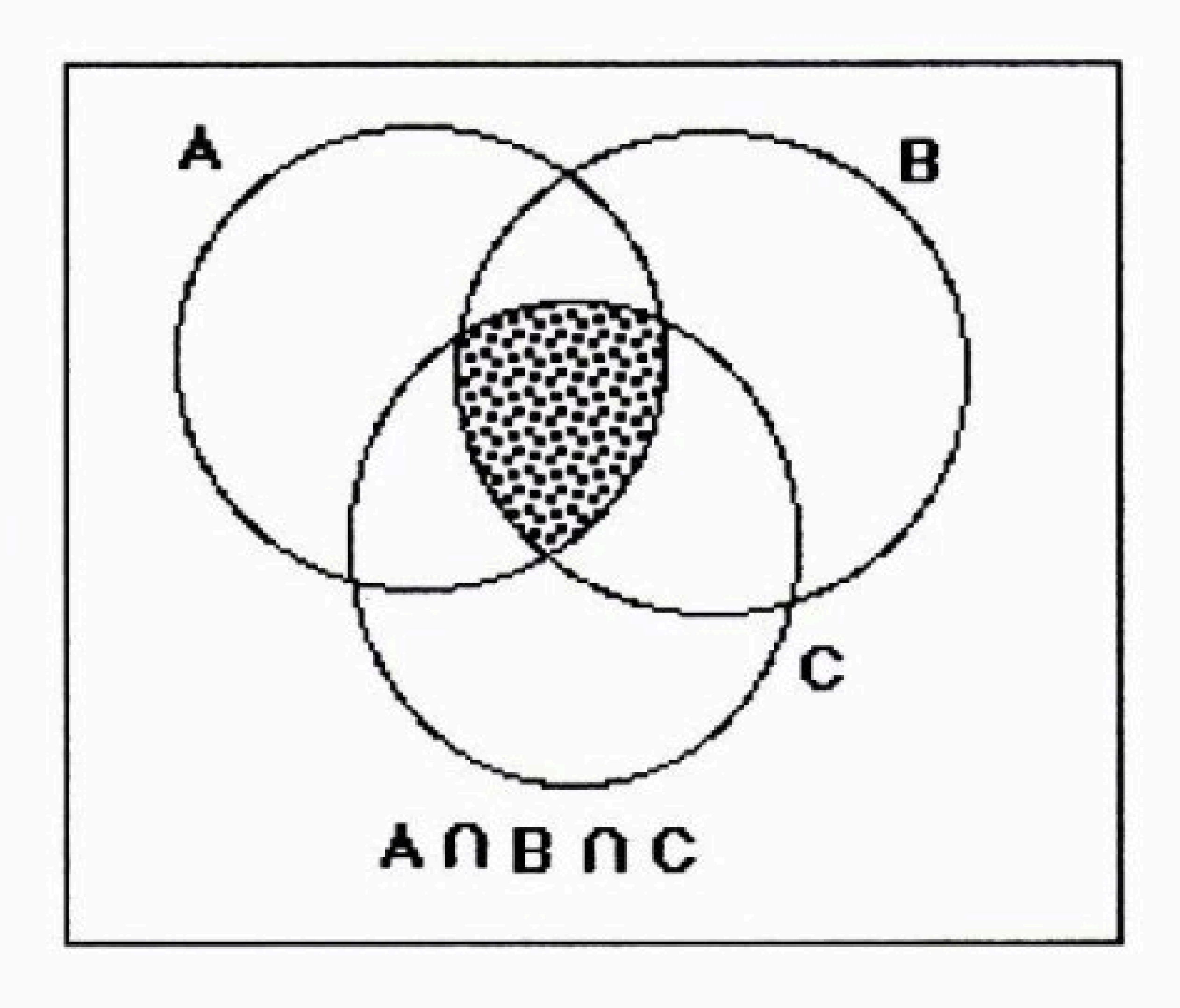
حيث n عدد نهائي من المجموعات. ولتوضيح التعميم السابق نورد المثال التالي:

إذا كانت $A_k = \{ x : 0 < x < \frac{1}{k} \} \; ; \; k = 1 , 2 , 3 , \ldots$

فإن :

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

هي مجموعة لاتحتوي على أي من العناصر؛ أي مجموعة فارغة، حيث إنــه لا توجد نقاط تنتمي إلى كل مجموعة من المجموعات ... , A_1 , A_2 .



الشكل رقم (١,٥). تقاطع ثلاث مجموعات

خواص عملية التقاطع

(أ) الخاصية الإبدالية : لأي مجموعتين A , B معرفتين على S فإن

$$A \cap B = B \cap A$$

(ب) الخاصية التجميعية : لأي ثلاث مجموعات A , B , C معرفة على S فإن:

$$A \cap (B \cap C) = (AB)\, C = A \cap B \cap C$$

(جـ) لأي مجموعة A معرفة على المجموعة S فإن :

$$A \cap A = A \quad , \quad A \cap S = A \quad , \quad A \cap \Phi = \Phi$$

(د) خاصية التكميل: لأي مجموعة A معرفة على S فإنه يوجد لها مكملة $\overline{A}$ حيث إن $A \cap \overline{A} = \Phi$.

يمكن ملاحظة أن كلا من عمليتي الاتحاد والتقاطع تحققان خاصية مهمة تسمى بخاصية التوزيع (distributive laws) ونقصد بها خاصية توزيع الاتحاد على التقاطع وتوزيع التقاطع على الاتحاد وتكتب على التوالي كما يلي:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \;,\; \forall \; A , B , C \subset S$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \;,\; \forall \; A , B , C \subset S$$

قانونا دي مورجان

هناك علاقة رابطة بين عمليات الاتحاد والتقاطع والمجموعة المكملة، وتسمى بقانون دي مورجان (De Morgan)، وتتضح هذه العلاقة من القانونين التاليين:

لأي مجموعتين A , B جزئيتين من S نجد أن :

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad ; \qquad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

يمكن تعميم قانوني دي مورجان السابقين إلى n من المجموعات؛ فإذا كان لدينا عدد n من المجموعات... , A_1 , A_2 فإنه يمكن صياغة قانوني دي مورجان كما يلي:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \quad ; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

٣, ٨, ١ عملية الطرح أو الفرق بين مجموعتين

لأي مجموعتين A , B جزئيتين من S توجد المجموعة A-B التي تحتوي على كل عناصر المجموعة A التي لاتنتمي إلى المجموعة B ؛ أي أن

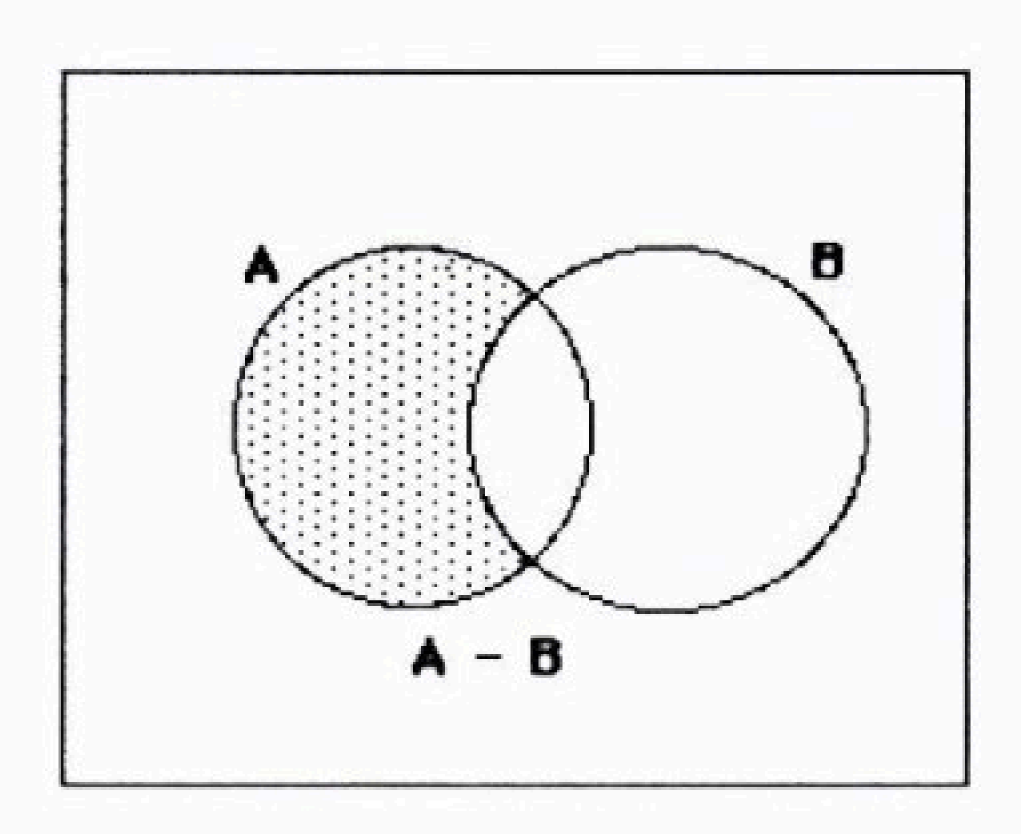
$$A - B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}$$

يجب ملاحظة أن عملية الطرح (أو الفرق) بين مجموعتين ليست إبدالية؛ أي أن:

$$A - B = \left\{ x : x \in A \wedge x \notin B \right\} \neq B - A = \left\{ x : x \in B \wedge x \notin A \right\}$$

وكذلك يجب ملاحظة أن A-B والمجموعة B مجموعتان منفصلتان؛ أي أن:

$$(A - B) \cap B = \Phi$$



الشكل رقم (١, ٦). الفرق بين مجموعتين

خواص عملية الطرح لمجموعتين:

(أ) لأي مجموعتين A , B جزئيتين من S فإن :

$$A - B = A - AB = A\overline{B}$$

$$(A - B) \cup B \neq A$$

(ب) لأي ثلاث مجموعات A, B, C جزئية من S فإن:

$$A - BC = (A - B) + (A - C)$$

$$A - (B + C) = (A - B)(A - C)$$

(جـ) لأي مجموعة A فإن :

$$A + (A - A) = A \;\; ; \;\; (A + A) - A = \Phi$$

٩ , ١ حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعات

إذا كانت A, B مجموعتين ما، فإن حاصل الضرب الكارتيزي (Cartesian) لهاتين المجموعتين $A \times B$ هو المجموعة التي تشتمل على عناصر في الصورة الثنائية (x, y) بحيث إن x عنصر في A ، y عنصر في B، وتكتب :

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$$

وبصورة عامة، إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_k$ تمثل k من المجموعات، فإن حاصل الضرب الكارتيزي لهذه المجموعات هو $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ مجموعة تحتوي جميع الأعضاء التي على الصورة $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ بحيث إن x_1 عنصر من عناصر A_1 ، وx_2 عنصر من عناصر A_2، . . . ، وx_k عنصر من عناصر A_k وتكتب :

$$\mathop{X}_{i=1}^{k} A_i = \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \in A_i \;, \; i = 1, \ldots, k \right\}$$

حيث

$$\mathop{X}_{i=1}^{k} A_i = A_1 \times A_1 \times \ldots A_k$$

فإذا كانت R ترمز لمجموعة جميع الأعداد الحقيقية (الخط المستقيم) فإن:

$$R \times R = \{ (x, y) \mid x \in R \;, \; y \in R \}$$

تمثل مجموعة جميع النقط (x , y) الموجودة في المستوى، وكذلك فإن :

$$R \times R \times \dots \times R = \left\{ (x_1 , \dots , x_n) \mid x_i \in R \ , \ i = 1 , \dots , n \right\}$$

تمثل مـجموعة جميـع النقط $(x_1 , \dots , x_n)$ الموجـودة في فراغ إقليدس ذي البعد n.

مثال ١,٩,١

إذا مثلت A مجموعة تحتوي على كل ما ينتج من رمي قطعة من النقـود سواء صورة (H) أو كتابـة (T) فإن $A = \{ H , T \}$ ، وإذا كانـت $B = \{ 1 , 2 , 3 \}$ فإن الضرب الكارتيزي لأي مجموعتين A ، B هو

$$A \times B = \left\{ (x,y) \mid x \in A, y \in B \right\}$$

ولهاتان المجموعتان على وجه الخصوص هو :

$$A\times A = \{H,T\}\times\{H,T\} = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

$$A\times B = \{H,T\}\times\{1,2,3\} = \{(H,1),(H,2),(H,3),(T,1),(T,2),(T,3)\}$$

$$B\times A = \{1,2,3\}\times\{H,T\} = \{(1,H),(1,T),(2,H),(2,T),(3,H),(3,T)\}$$

$$B\times B = \{1,2,3\}\times\{1,2,3\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

نـظـريـة ١,٩,١

إذا كانـت $n_1 , n_2 , \dots , n_k$ تمثل عدد عناصر المجـمـوعـات الـقـابـلـة للعد $A_1 , A_2 , \dots, A_k$ على التوالي، فإن عدد عناصر المجموعة الناتجة من حاصل الضرب الكارتيزي $\mathop{X}\limits_{i=1}^{k} A_i$ هو $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

ملاحظة ١ , ٩ , ١ في المثال السابق ١ , ٩ , ١ كان عدد عناصر المجموعة A هو$2 = n_1$ وعدد عناصر المجموعة B هو$3 = n_2$ وعلى ذلك فإن عدد عناصر الضرب الكارتيزي هو :

$n_1 \times n_1 = 4$ هو $A \times A$

$n_1 \times n_2 = 6$ هو $A \times B$

$n_2 \times n_1 = 6$ هو $B \times A$

$n_2 \times n_2 = 9$ هو $B \times B$

وبصورة عامة يمكن ملاحظة أن

$$A \times B \neq B \times A$$

١ , ١٠ دوال المجموعة

في حساب التفاضل والتكامل إذا كان لدينا الدوال التالية :

$$f(x) = 2x \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

$$f(x_1 , x_2) = \begin{cases} e^{\frac{-(x_1 + x_2)}{2}} & , \quad 0 < x_1 < \infty \quad , \quad 0 < x_2 < \infty \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f(x_1 , x_2 , \dots m\, x_n) = \begin{cases} 4x_2x_3 \dots x_n & , \quad 0 < x_i < 1 \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , n \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فإن من الملاحظ أن الدالة $f(x)$ تأخذ القيمة $f(1) = 2$ عند النقطة $x=1$ والدالة$f(x_1 , x_2)$ تأخذ القيمة $f(-1 , 3) = 0$ عند النقطة $(x_1 , x_2) = (-1 , 3)$، وكذلك الدالة$f(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ قيمتها $f(x_1 , x_2 , \dots , x_n) = 3$ عند النقطة $(x_1 , \dots , x_n) = (1 , \dots , 1)$. تسمى هذه الدوال المعرفة على نقاط بدوال

النقاط (point functions). قد يعترضنا أحيانا أن الدالة ليست معرفة على نقطة واحدة فقط كما هو الحال في الدوال السابقة، وإنما معرفة على مجموعة من النقاط (set of points) عندها تسمى الدالة بدالة المجموعة أو دالة على المجموعة (set function) ويمكننا إعطاء التعريف التالي.

التعريف ١ , ١٠ , ١ الدالة المعرفة على مجموعة نقاط تسمى بدالة المجموعة؛ فمثلا إذا كانت A مجموعة في فراغ ذي بعد واحد، وترمز لمجموعة النقاط التي تمثل الأعداد الصحيحة الموجبة X، وكانت $Q(A)$ عدد النقاط أو العناصر في المجموعة A فإن $Q(A)$ تسمى دالة على المجموعة A ؛ أي:
إذا كانت $A = \{ x : 0 < x < 8 \}$ فإن، $Q(A) = 7$ ، وإذا كانت $A = \{-1 , -2\}$ ، فإن $Q(A) = 0$ وإذا كانت $A = \{ x : -\infty < x < 6 \}$ حيث x عدد صحيح موجب، فإن $Q(A) = 5$.

مثال ١ , ١٠ , ١

إذا كانت A مجموعة معرفة في فراغ ذي بعدين، وكانت $Q(A)$ تمثل مساحة A إذا كانت A نهائية وفيما عدا ذلك فإن $Q(A)$ غير معرفة؛ أي:
إذا كانت

$$A = \left\{ (x , y) : x^2 + y^2 \le 1 \right\} \text{ ، فإن } Q(A) = \pi$$

وإذا كانت

$$A = \{ (x , y) : (x , y) = (0 , 0) , (0 , 1) , (1 , 1) \} \text{ ، فإن } Q(A) = \frac{1}{2}$$

وإذا كانت

$$A = \{ (x , y) : x \ge 0 , y \ge 0 , x+y \le 1 \} \text{ ، فإن } Q(A) = \frac{1}{2}$$

مثال ٢ , ١٠ , ١

إذا كانت A مجموعة معرفة في فراغ ذي بعد واحد، وكانت $Q(A) = \sum_{A} f(x)$ ، وكانت f(x) معرفة كما يلي :

$$f(x)\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & , \quad x = 1,2,3,\ldots \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فإنه إذا كانت

$A = \{ x : 1 \leq x \leq 2 \}$ ، فإن $Q(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

وإذا كانت $x = 0 , 1 \quad , \quad f(x) = p^x (1-p)^{1-x}$ ، فإن $Q(A) = p$

وإذا كانت $A = \{ x : x=0 \}$ ، فإن $Q(A) = 1 - p$

مثال ٣ , ١٠ , ١

إذا كانت A تمثل مجموعة النقاط الداخلية الواقعة على حدود مربع، وكانت A مجموعةجزئية من A، وكانت Q(A) معرفة كما يلي :

$$Q(A) = \iint_A dy\, dx$$

فإذا كانت $A = \{ (x , y) : 0 < x < y < 1 \}$ ، فإن $Q(A) = \frac{1}{2}$

١١ , ١ المجموعة المنتهية والمجموعة القابلة للعد

نقصد بقولنا مجموعة منتهية (finite set) المجموعة التي تحتوي على عدد محدد ومنته من العناصر. فعليه تكون المجموعة الخالية Φ مجموعة منتهية، وكذلك المجموعة المكونة من n عنصرا مجموعة منتهية. هناك أمثلة عديدة

للمجموعات المنتهية نذكر منها على سبيل المثال :

{ 1 , 2 , 3 , ... , 99 , 100 }

{ x : x شهر في السنة }

{ x : x خطأ مطبعي في كتاب مقرر ٢٤٤ ريض }

{ x : x ركن من أركان الإسلام }

{ x : x ركن من أركان الإيمان }

تسمى المجموعة لانهائية (infinite set) إذا كانت مجموعة غير منتهية، ومن الأمثلة على المجموعة غير المنتهية :

{ x : x عدد صحيح }

{ x : x عدد حقيقي بحيث $0 \le x \le 1$ }

{ x : x نقطة على الخط المستقيم x = y }

يقال إن المجموعة قابلة للعد (countable or denumerable) إذا كانت منتهية أو غير منتهية، ويمكن وضع عناصرها على صورة متتابعة، أي في صورة تناظر أحادي (one-to-one correspondence) مع متتابعة من الأعداد الصحيحة الموجبة. ومن أمثلة ذلك مجموعات الأعداد الفردية الموجبة ومجموعات الأعداد الطبيعية. المجموعة غير القابلة للعد (non-denumerable) هي مجموعة لانهائية لايمكن وضع عناصرها في صورة تناظر أحادي مع مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. ومن أمثلتهامجموعة الأعداد الحقيقية في الفترة (0 , 1) أي أن

{ x : $0 < x < 1$ },

{ x : x نعمة من نعم الله تعالى },

{ x : x جملة من جمل اللغة العربية }.

١ , ١٢ تجزئة المجموعات

تجزئة (partition) المجموعة S هوتقسيم المجموعة S إلى مجموعات جزئية غير خالية يمكن وصفها على أنها مجموعات جزئية منفصلة اتحادها هو المجموعة

S؛ أي أنه إذا كان لدينا مجـمـوعـة S وقسمت إلى مجموعات جزئـيـة غـيـر خالية $S_1 , S_2 , \ldots , S_n$ بحيث يكون :

$$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n = \bigcup_{i=1}^{n} S_i = S$$

$$S_i \cap S_j = \Phi \quad ; \quad i , j = 1 , 2 , \ldots , n \quad ; \quad i \neq j$$

فإن المجموعـات $S_1 , S_2 , \ldots , S_n$ تسمى في هذه الحالة تجزئة المجمـوعـة S. وتسمى المجموعات الجزئية في تجزئة المجموعة S خلايا (cells)؛ فمثلا إذا كانت المجموعة S معرفة كما يلي :

$$S = \{ a , b , c , d , e , f \}$$

فأي من المجموعات التالية يعتبر تجزيئا للمجموعة S ؟

$$S_1 = \{ \{a\} , \{b\} , \{d , e , f\} \},$$

$$S_2 = \{ \{a\} , \{b , c\} , \{c , d , e , f\} \},$$

$$S_3 = \{ \{a , b\} , \{c\} , \{d , e , f\} \}.$$

من تعريف تجزيء المجموعـة S نلاحظ أن المجموعـة S_1 ليست تجـزيئـا للمجموعة S؛ لأن $c \in S$ ، ولكن c لا تنتمي إلى أي خلية في S_1 ، وكذلك S_2 لاتكون تجزيئا للمجمـوعـة S لأن $c \in S$ وموجود في خليتين من خلايـا S_2. نلاحظ أيضا أن S_3 تسمى تجزيئا للمجموعة S؛ لأن كل عنصر في S ينتمي إلى خلية واحدة فقط بالإضافة إلى كونها مجموعات جزئية غير خالية منفصلة واتحادها هو المجموعة S ذاتها.

١٣ , ١ فصول المجموعات

التعريف ١ , ١٣ , ١: فصل المجموعات الجزئية للمجموعـة S ، ويرمز له بالرمز

C(S) ، هو المجموعة التي تكون عناصرها مجموعات جزئية من المجموعة S ؛ فمثلا في المجموعة من الخطوط يمثل كل خط مجموعة من النقاط.

التعريف ٢ , ١٣ , ١: إذا احتوى فصل المجموعات الجزئية للمجموعة S ، C(S) على جميع المجموعات الجزئية من S فإنه يسمى مجموعة القوى (power set) للمجموعة S ويرمز لها بالرمز P(S). على سبيل المثال، إذا كانت S = { H , T } فإن:

$$P(S) = \text{Power set of } S = \left\{ \Phi , \{H\} , \{T\} , \{H , T\} \right\}$$

يمكن ملاحظة أن عدد عناصر المجموعة S هو n(S) = 2 ، وأن عدد عناصر مجموعة القوى P(S) هو n(P(S)) = 4 ؛ أي يساوي 2^2 فعليه يمكن أن تستنتج أن:

$$n(P(S)) = 2^{n(S)}$$

التعريف ٣ , ١٣ , ١: (جبر على المجموعة S) تسمى عائلة المجموعات $\Im$ المعرفة على المجموعة S «جبر على المجموعة S » إذا كانت تحتوي على S ومغلقة تحت عمليتي التكميل والاتحاد.

بعبارة أخرى، تسمى عائلة المجموعات $\Im$ المعرفة على S «جبراً على المجموعة S» إذا تحققت الشروط التالية :

(أ) عائلة المجموعات $\Im$ تحتوي على المجموعتين Φ, S أي $\Phi , S \in \Im$.

(ب) المجموعة المكملة لأي مجموعة في $\Im$ تنتمي إلى $\Im$: لكل $A \in \Im$ فإن $\overline{A} \in \Im$.

(جـ) اتحاد أي عدد غير منته وقابل للعد من مجموعات $\Im$ تنتمي إلى $\Im$ أي إذا كان $A_1 , A_2 , \ldots , \in \Im$ فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$.

يمكن ملاحظة أنه من قانوني دي مورجان، وإذا كانت عائلة المجموعات $\Im$

المعرفة على المجموعة S مغلقة تحت المجموعات المكملة، فإن عائلة المجموعات $\Im$ أيضا تحقق شروط الانغلاق تحت الاتحاد ومغلقة تحت مجموعة التقاطع.

التعريف ٤ ,١٣ ,١ : (جبر بوريل (Borel algebra) أو حقل سيجما (s - field)):
الجبر $\Im$ المعرف على المجموعة S يسمى «جبر بوريل» أو حقل سيجما (σ - field) إذا كان لكل متتابعة من عناصر $\Im$ فإنه ينتمي إلى $\Im$ المجموعة المكونة من حاصل ضرب (تقاطع) عناصر هذه المتتابعة؛ أي أنه إذا كان لدينا :

$$A_1 , A_2 , \ldots , \in \Im$$

فإن
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \prod_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$$

مثال ٣ ,١٣ ,١

أي من العائلات التالية تسمى «جبرا على المجموعة S » :

$$\Im_1 = \{ \Phi , S \} \quad , \quad \Im_2 = \{ \Phi , A , \overline{A} , S \}$$

من الملاحظ أن العائلة $\Im_1$ المعرفة على S هي «جبر على المجموعة S » لأنها تحقق شروط الجبر الثلاثة:

(أ) $S \in \Im_1$

(ب) لكل مجموعة في العائلة $\Im_1$ نجد لها مكملة تنتمي أيضا إلى $\Im_1$ فمثلا:

$$\forall \ S \in \Im_1 \Rightarrow \overline{S} = \Phi \in \Im_1$$

$$\forall \ \Phi \in \Im_1 \Rightarrow \overline{\Phi} = S \in \Im_1$$

(جـ) لأي مجموعتين في $\Im_1$ فإن اتحادهما ينتمي أيضا إلى $\Im_1$ ؛ أي أن :

$$\forall \ \ \Phi , S \in \Im_1 \ \Rightarrow \ \Phi \cup S = S \in \Im_1$$

وبالمثل فإن العائلة $\Im_2$ المعرفة على S هي أيضا جبر على المجموعة S لتحقق الشروط الثلاثة السابقة.

مثال ١ , ١٣ , ٤

عائلة كل المجموعات الجزئية لأي مجموعة غير خالية S تكون جبر بوريل.

مثال ١ , ١٣ , ٥

إذا كانت $S = \{1, 2, 3, 4\}$ فإن العائلات التالية من المجموعات المعرفة على S تكون جبر بوريل على المجموعة S.

$$\Im_1 = \left\{ S , \Phi \right\}$$

$$\Im_2 = \left\{ S , \Phi , \{1 , 2\} , \{3 , 4\} \right\}$$

$$\Im_3 = \left\{ S , \Phi , \{1\} , \{2 , 3 , 4\} \right\}$$

مثال ١ , ١٣ , ٦

إذا كانت $A_n , \ldots , A_1$ متتابعة منتهية من المجموعات المعرفة على سيجما جبر $\Im$ فأثبت أن:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Im \qquad (١)$$

$$S \in \Im \qquad (٢)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im \qquad (٣)$$

لإثبات (١)

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Im$$

ضع $A_{n+1} = \Phi \;,\; A_{n+2} = \Phi \;, \ldots$

إذن $A_1 \;, A_2 \;, \ldots A_n \;, A_{n+1} \;, A_{n+2} \;, \ldots \in \mathfrak{I}$

من تعريف الجبر (الشرط (٣)) نجد أن :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{I}$$

لكن

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \left[\bigcup_{i=n+1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \Phi = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

أي أن : $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

وحيث إن : $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{I}$$

فإن $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{I}$$

بالنسبة للفقرة (٢) حيث إن$\mathfrak{I} \in \Phi$ فإن من تعريف سيجما جبر على المجموعة S نجد أن :

$$\overline{\Phi} \in \mathfrak{I}$$

لكن $\overline{\Phi} = S$

إذن $S \in \Im$

بالنسبة للفقرة (٣) : نفرض أن$\Im \ni A_1 , \dots , A_n$ فعليه نجد من تعريف سيجما جبر على المجموعة أن : $\overline{A_1} , \dots , \overline{A_n} \in \Im$

إذن نجد $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \Im$

إذن $\overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathbf{A_i}} \right)} \in \Im$

أي أن $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$

مثال ١,١٣,٧

إذا كانت$[a_i , b_i)$ فقرات منفصلة ،محتواة في وكانت$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_i , b_i)$ [0 , 1) فإن الفصل المكون من جميع الفترات المعرفة في A هو جبر على المجموعة S وليس بالضرورة سيجما جبر على المجموعة S .

١,١٤ تمـــاريـــن

١- يوضح الجدول التالي بعض الوظائف الفنية في مجموعة من المستشـفـيـات المتخصصة مرتبة ومصنفة حسب العمر ونوعية الوظيفة : المجموعات A_1 إلى A_4

تمثل مجموعات العمر، والمجموعات B_1 إلى B_4 تمثل نوعية الوظيفة:

نوعية الوظيفة \ العمر		A1 ≤ 25	A2 25-30	A3 31-35	A4 > 35	المجموع
B1:	طبيب عام	0	5	25	75	105
B2:	خدمات التغذية	20	30	35	35	120
B3:	خدمات معامل	3	6	6	10	25
B4:	السجلات الطبية	7	15	8	12	42
B5:	التمريـــض	200	375	442	203	1,220
B6:	الصيـدلـــة	1	12	8	3	24
B7:	تكنولوجيا القلب	4	10	19	12	45
B8:	العلاج الطبيعي	5	25	15	10	55
B9:	خدمات أخرى	20	35	20	25	100
	المجمـــــوع	260	513	578	385	1,736

أوجد كلا مما يأتي

(أ) $B_1 \cap A_4$ ، $n(B_1 \cap A_4)$ ،

(ب) $B_2 \cup A_2$ ، $n(B_2 \cup A_2)$ ،

(جـ) $\overline{A_4}$ ، $n(\overline{A_4})$.

٢- صندوق به ١٢ تذكرة مرقمة من ١ إلى ١٢، سحبت تذكرة من الصـنـدوق وكانت A تمثل مجموعة يقبل الرقم على التذكرة المسحوبة القسمة علـى ٢، و B تمثل مجموعة يقبل الرقم على التذكرة المسحوبة القسمة عـلـى ٣. أوجـد اتحـاد المجموعتين A , B وتقاطعهما.

٣- عند ملاحظة التكرارات للون العين في مجموعة من الآباء والأبناء حصلنا على النتيجة التالية:

لون العينين للابن	لون العينين للأب	
	أشهل	أزرق
أشهل	471	148
أزرق	151	230

إذا كانت A تمثل عين الأب ذات اللون الأشهل، وكانت B تمثل عيون الابن ذات اللون الأشهل؛ فأوجد $A \cup B$ وكذلك $A \cap B$.

٤- إذا حفر ثقب في لوح معدني، وقيس قطره وكانت E تمثل «أن قطر الثقب على الأقل 2.3 بوصة وعلى الأغلب 2.4 بوصة » فاوجد مكملة المجموعة E.

٥- بطارية راديو جافة مصنعة من قبل شركة ما أخضعت للفحص فسجلت مدة صلاحيتها بالساعات. إذا كانت المجموعة الشاملة S معرفة كالتالي $S = \{ t : t \geq 0 \}$ وكانت A تمثل مجموعة «أن البطارية ستدوم أكثر من 50 ساعة» وكانت B تمثل مجموعة «أن البطارية تنتهي صلاحيتها في 150 ساعة أو أقل» وكانت C هي المجموعة: «أن المدة المتطلبة لفحص البطارية هي على الأقل 25 ساعة، وفي نفس الوقت أقل من 200 ساعة»، فأوجد المجموعات التالية :

$$A \cap C \ , \ B \cup C \ , \ \overline{B \cup C}$$

٦- إذا كانت

$$U = \{ x : 0 \ \ x \ \ 2 \}$$

$$A = \{ x : \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \}$$

$$B = \{ x : \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \}$$

فاكتب المجموعات

(أ) $(A \cup B)^C$

(ب) $(A \cap B)^C$

(جـ) $A^C \cap B$

٧- أثبت أنه إذا كان $A \subset B$ فإن :

(أ) $A \cap B = A$

(ب) $A \cup B = B$

٨- إذا اشتملت A على n من العناصر، فكم عدد عناصر المجموعات التالية :

(أ) $A \times A$

(ب) $\{(x, y) \mid x \in A, y \in A, x \neq y\}$

(جـ) $A \times A \times A$

(د) $\{(x, y, z) \mid x \in A, y \in A, z \in A \ , \ x \neq y, x \neq z, y \neq z\}$

٩- أثبت أن :

(أ) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(ب) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(جـ) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$

(د) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C$

١٠- أثبت ما يلي :

(أ) إذا كانت $A \subset \Phi$ فإن $A = \Phi$.

(ب) لكل فصل $\{A_i , i \in I\}$ يكون $\bigcap_i \overline{A_i} = \overline{\bigcup_i A_i}$.

(جـ) يمكن كتابة عملية الفرق بين مجموعتين بدلالة التقاطع والإكمال.

(د) $A \subset B$ إذا - وإذا فقط - $A = A \cap B$.

١١- لكل مجموعة A معرفة على فراغ ذي بعد واحد؛ عيّن Q(A) مساوية لعدد النقاط في المجموعة A التي تمثل أعدادا صحيحة موجبة. إذا كانت A_2 , A_1 معرفة كالتالي :

$A_1 = \{x : x$ عدد من مضاعفات العدد 3 أقل من أو يساوي 50 $\}$

$A_2 = \{x : x$ عدد من مضاعفات العدد 7 أقل من أو يساوي 50 $\}$

فأوجد:

$$Q(A_1) , Q(A_2) , Q(A_1 \cup A_2) , Q(A_1 \cap A_2)$$

وأثبت أن:

$$Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2)$$

١٢- لكل مجموعة A معرفة على فراغ ذي بعد واحد، إذا كانت Q(A) معرفة كما يلي :

$$Q(A) = \int_A f(x)dx \quad \text{حيث} \quad f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) , & 0 < x < 1 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وكانت

$$A_1 = \left\{x : \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\right\} , \quad A_2 = \left\{x : x = \frac{1}{2}\right\} , \quad A_3 = \{x : 0 < x < 10\}$$

فأوجد $Q(A_1) , Q(A_2) , Q(A_3)$.

١٣- إذا كانت A تمثل النقاط الداخلية أو الواقعة على حدود مربع برؤوس على النقطة $(0 , 0)$ والنقطة $(1 , 1)$ وكانت $Q(A)$ تعطى كما يلي: $Q(A) = \iint_A dy\, dx$

إذا كانت $A \subset A$ هي المجموعة$\{ (x , y) : 0 < x=y < 1 \}$ فأوجد $Q(A)$.

وإذا كانت $A \subset A$ هي المجموعة$\left\{ (x , y) : 0 < \frac{x}{2} \le y \le \frac{3x}{2} < 1 \right\}$ فاوجد $Q(A)$.

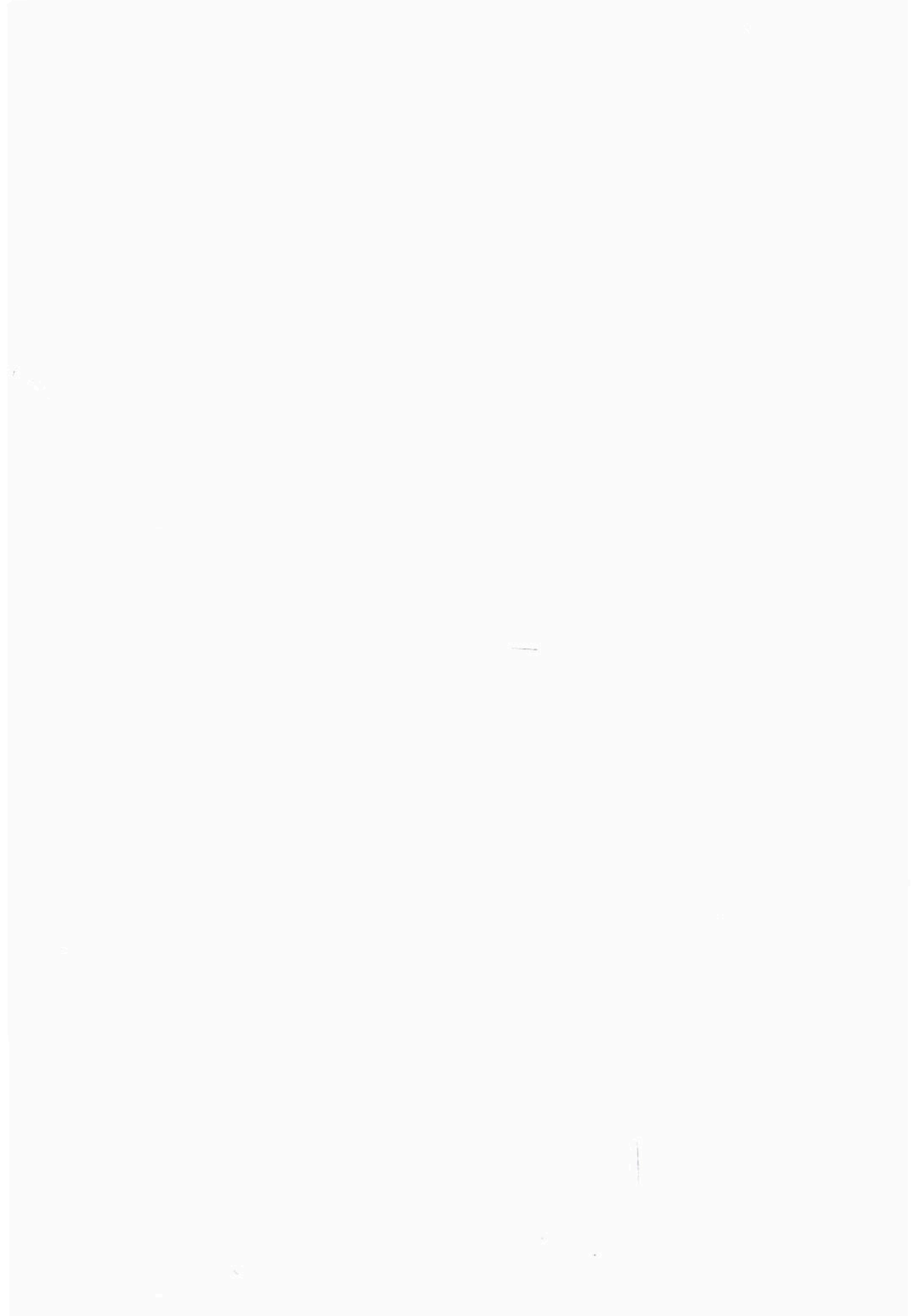
١٤- أي من الفصول التالية تكون تجزيئًا على المجموعة S :

$$S_1 = \{A_1 , A_2 , A_3\} \quad , \quad S_2 = \{B_1 , B_2 , B_3\}$$

حيث إن $S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

وإن $A_1 = \{ 1 , 3 , 5 \} \;,\; A_2 = \{ 2 \} \;,\; A_3 = \{ 2 , 6 \}$

$B_1 = \{ 1 , 4 \} \;,\; B_2 = \{ 3 , 5 \} \;,\; B_3 = \{ 2 , 6 \}$



الفصل الثاني

الاحتمال

● مقدمة ● بعض التعريفات الأساسية في علم الاحتمال ● تعريف الاحتمال ● أمثلة على الاحتمالات ● نظريات الاحتمال ● أمثلة على نظرية الاحتمال ● الاحتمال الشرطي ● قانون الضرب في الاحتمالات ● علاقة الاحتمال الكلي ● علاقة بييز ● نظريات على الاحتمال الشرطي ● الحوادث المستقلة ● بعض نظريات الاستقلال ● تمارين

٢,١ مقدمة

كثيرا ما تستخدم كلمة الاحتمال (probability) في حياتنا اليومية، فنتكلم عن احتمال فوز متسابق على متسابق آخر، وذلك بمعنى إمكانية الفوز، وقد نضيف إلى كلمة محتمل أو إمكانية كلمة أخرى تدل على قوة أو درجة هذا الاحتمال فنقول مثلا إنه من المحتمل جدا أو من الممكن جدا أن تمطر السماء بعد ظهر اليوم، أو أن احتمال أن تمطر السماء قليلا. أو أنه من غير الممكن أن ينجح طالب معين أو أن إمكانية نجاحه قليلة جدا. إلا أن الإحصائيين لايرضون بالتعبير عن الاحتمال بأنه صغير أو كبير، بل يرون ضرورة إعطائه قيمة كمية أو عددية يمكن التعبير عنها بدقة. مما سبق نلاحظ أن كلمة احتمال تعني شيئين رئيسين هما :

(أ) مقياس تحليلي لمعرفة عدم ثبوت حادث معين.

(ب) مقياس يقيس درجة تيقن حادث ما مثل درجة التيقن.

ويرجع الفضل في اكتشاف علم الاحتمال إلى عالمين رياضيين فرنسيين في القرن السابع عشر الميلادي هما بلييز باسكال (Blaise Pascal)، وبيير دي فيرمات (Pierre De Fermat) وذلك عند معالجتهما لمشكلات القمار (gambling problems). وقام بعد ذلك كل من بيرنولي (J. Bernuolli)، ودي موافر (A. De Moivre) ولابلاس (P. S. Laplace) بتطوير مفهوم علم الاحتمال. تطور المفهوم العلمي الحديث للاحتمال فيما بعد خلال العشرينات والثلاثينات من هذا القرن ليجاري النقلة النوعية والكمية في البحث العلمي التي تعود إلى ذلك الزمن.

أصبحت نظرية الاحتمالات، في وقتنا الحاضر، أكثر تطبيقا لتشمل مجالات متعددة تساهم في عمليات استقراء النتائج، واتخاذ القرارات الذكية البارعة في كثير من العلوم الأخرى المختلفة كالاقتصاد، والإدارة ،وعلم الاجتماع، وعلم الفلك، وعلم الفيزياء، والهندسة، وبحوث العمليات، وعلم الأجنة، وعلم النمذجة بالإضافة إلى مجالات أخرى من العلوم التجريبية أو النظرية. وباختصار، يظهر علم الاحتمال وتزداد الحاجة إلى تطبيقاته أينما يظهر عدم التيقن وتحكم العشوائية سلوك الظاهرة المدروسة.

ومن المفيد قبل الدخول في تعريف الاحتمال ومفاهيمه ونظرياته التعرض لبعض التعريفات والمفاهيم الأساسية المستخدمة في نظرية الاحتمالات.

٢,٢ بعض التعريفات الأساسية في علم الاحتمال

العلاقة: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكرتيزي للمجموعتين A , B، وهذا النوع من العلاقة عادة يسمى علاقة ثنائية (binary)؛ أي أن العلاقة هي علاقة جامعة أو رابطة بين شيئين أو أكثر من الأشياء. المجموعة المكونة من العناصر الأولى في العلاقة الثنائية تسمى نطاق

العلاقة (domain) أو مجالها، والمجموعة المكونة من العناصر الثانية في العلاقـة الثنائية تسمى المدى أو النطاق المصاحـب (range) ، فمثلا إذا كانت , (1,4)} = F
{(3,12) , (2,2) تـشـكل عـلاقـة، فإن نـطـاق هـذه العلاقـة هـو المجـموعـة { 3 , 2 , 1 } ونـطاقها المـصاحـب هـو المجموعة { 12 , 7 , 4 } .

الدالة: قانون يعيّن قيما تحت شروط معينة من المجموعة A إلى المجموعة B كالتالي : لكل عنصر x من المجموعة A يوجد عنصر وحيد y من المجموعة B؛ أي أن $f : A \longrightarrow B$ وتُقرأ f دالة من المجموعـة A إلى المجموعة B ، أو بعبارة أخرى الدالة هي حالة خاصة من العلاقة الثـنـائيـة التي تجـمع أو تربـط بين كل عنصر في النـطـاق إلى عنصر وحـيـد في النـطاق المصاحـب؛ فمـثـلا قـيـمة الـدالـة f عـلى النـقـطة $x \in A$ تـعـرف كـالتـالي $y = f(x) \in B$.

الـدالة التي تحتـوي في نطـاقـها المصـاحـب على أرقـام تسمـى دالـة رقميـة (ذات قيمة عددية) (numerical function)، والدالة التي يحتـوي نطاقـها ونطاقـها المصـاحب على مجموعـات من الأعـداد الحقيـقيـة تسمى دالـة حقيقيـة؛ أي ذات قيـمة حـقيقيـة (real-valued function) .
تسمى الدالة f(x) دالة زوجـيـة (even function) إذا وجدنا أن لكـل x في النطاق المصاحب $f(-x) = f(x)$، وتـسـمى الـدالـة f(x) فـرديـة (odd function) إذا حـققت الخـاصـية $f(-x) = -f(x)$.

التجربة: تعني كلمة «التجربـة» (experiment) القـيـام بعمل محـدد تحديدا واضحا، وهي عملية الحصول على بيانات إحصائية. أما النتيجة (result) التي نحصل عليها من التجربة تسمى ناتج التجربة (outcome).

التجربة العشوائية: كل تجربة لاتكون نتيجتها معروفة مسبقا بشكل حتمي تسمى تجربة عشوائيـة (random)؛ فمثلا رمي قطعة نقود معدنية، تعد تجـربـة إحصائية عشوائية، والنتيجة إما صورة (H) أو كتابـة (T)، وتجربـة رمي حجر زهـرة النرد نتيجتها أن الوجـه الذي يـظـهر إلى أعـلى يحمل أحـد الأعـداد 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 وكذلك تجربة اختيار ورقة من مجموعة ورق اللعب.

كل هذه الأمثلة تجارب إحصائية عشوائية، ولكن نتيجة التجربة قد لاتكون معروفة بشكل حتمي قبل إجرائها، ويمكن وصف التجربة العشوائية بثلاث خواص:

(أ) يمكن تكرار التجربة العشوائية عمليا ونظريا عدد من المرات.

(ب)للتجربة عادة ناتجان أو أكثر؛ أي أن التجربة وحيدة الناتج لاتعدّ تجربة عشوائية.

(جـ) الناتج من كل تكرار للتجربة غير معروف مسبقا بشكل حتمي؛ أي أن هناك درجة من عدم التيقن.

فراغ (أو فضاء) العينة: فراغ العينة (sample space) لتجربة إحصائية هو مجموعة جميع النتائج الممكنة والمتوقعة لتلك التجربة، ويرمز عادة لفراغ العينة بالرمز S.

سوف نورد المثال التالي لتجارب وفراغ العينة S المصاحب لهذه التجارب.

مثال ١ , ٢ , ٢

١- في تجربة رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة، فإن فراغ العينة S يتكون من نتيجتين هما H و T كما يلي: $S = \{ H , T \}$. أما عند رمي قطعة النقود مرتين فإن فضاء العينة في هذه الحالة هو: $S^* = S \times S = \{ HT , HH , TH , TT \}$.

٢- في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة فإن فراغ العينة S هو المجموعة المكونة من كل الأوجه الستة العلوية؛ أي أن $S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$. وعند رمي زهرة النرد مرتين، فإن فراغ العينة S هو مجموعة مكونة من 36 ناتجا ممكنا، ويمكن وصفه بأنه حاصل الضرب الكارتيزي لمجموعتين S , S حيث إن $S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$، أي أن:

$$S = \{ S \times S \} = \left\{ (x , y) : x \in S \wedge y \in S \right\}$$

حيث إن x يرمز لعدد النقاط على الوجه العلوي لقطعة زهرة النرد الأولى، ويرمز y لعدد النقاط على الوجه العلوي للقطعة الثانية. يمكن ملاحظة أنه يمكننا كتابة فراغ العينة S في حالة قطعتي نرد بطريقة الحصر كما يلي :

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{Bmatrix}$$

٣- إذا كانت التجربة تتمثل في تحديد نوع المولود في عملية ميلاد طفل جديد، أي من حيث كونه بنتا أو ابنا، فإن فراغ العينة S هو المجموعة المكونة من كل النتائج المتوقعــة، ويمــكن كتابته كما يلــي { بنت ، ابن } = S ، وإذا رمزنا للإبنة بالرمز"g"وللابن بالرمز "b" فإن: $S = \{ g , b \}$.

٤- إذا كانت التجربة قياس مدة صلاحية مصباح كهربائي بالساعات، فإن فراغ العينة S المصاحب لهذه التجربة هو المجموعة المكونة من كـل الأعـداد الحقيقية غير السالبة؛ أي أن: $S = \{x : 0 \leq x < \infty\}$.

ويسمى فراغ العينة الذي يحتوي على عدد نهائي أو عدد غير منته قابـل للعد من نقاط العينة فراغ عينة متقطع أو منفـصـل (discrete)، وفيما عدا ذلك يسمى فراغ العينة بفراغ متصل (continuous). يجب ملاحظة أن فراغ العينة هو فراغ منته (finite) ما لم يذكر خلاف ذلك.

الحدث (الحادثة): الحدث أو الحادثة (event) مجموعة جزئية من فراغ العينةS. يرمز عادة للحوادث بحروف لاتينية كبيرة مثل المجموعات. فعلى سبيل المثال، إذا كانت لدينا حادثة A تشتمل في ظهور الصورة في تجربة رمي قطعة النقود مرة واحدة فإن A يمكن كتابتها كما يلي : $A = \{ H \}$ ، وإذا كانت الحادثة A تمثل ظهـــور الصـــــورة مرة واحـــدة، في تجـــربة رمي قطـعتي نقـــود،

فإن A تعرف كما يلي :

$A = \{ HT , TH \}$.

إذا كانت الحادثة A تمثل مجموعة الأعداد الفردية في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة

فإن : $A = \{ 1 , 3 , 5 \}$

وإذا كانت الحادثة A هي $A = \{ (x , y) : x+y < 4 \}$ في تجربة رمي زهرتي نرد فإن: $A = \{ (1,1) , (1,2) , (2,1) \}$

وإذا كانت الحادثة A هي أن المصباح الكهربائي لن يدوم أكثر من ٥ ساعات في تجربة قياس مدة صلاحية مصباح كهربائي (رقم ٤ من المثال١ , ٢ , ٢) فإن :

$$A = \{x : 0 \le x \le 5 \}$$

نقطة العينة: العنصر من عناصر فراغ العينة يسمى نقطة العينة (sample point) .

إذا كان لدينا تجربة تتمثل في رمي قطعة نقود ثلاث مرات، فإن فراغ العينة S يكون:

$$S = \{HHH , HHT , HTH , HTT , THH , TTH , TTT\}$$

إذا كانت A_1 , A_2 , A_3 , A_4 مجموعات جزيئية من فراغ العينة S ومعرفة كما يلي:

ظهور الصورة مرة = $A_1 = \{ HTT , THT , TTH \}$ ،

ظهور الصورة مرتين = $A_2 = \{ HHT , HTH , THH \}$ ،

ظهور الصورة ثلاث مرات = $A_3 = \{ HHH \}$ ،

عدم ظهور الصورة = $A_4 = \{ TTT \}$ ،

كل هذه المجموعات الجزيئية المعرفة على S تسمى حوادث (events) وكل عنصر من عناصر هذه المجموعات الجزيئية يسمى نقطة عينة.

أنواع الحوادث؛ يوجد نوعان من الحوادث : حوادث بسيطة وحوادث مركبة.

الحادثة البسيطة (simple):هي مجموعة مكونة من عنصر واحد أو نقطة عينة من فضاء (فراغ) العينة.

الحادثة المركبة (compound): هي مجموعة مكونة من أكثر من نقطة من فراغ العينة.

يمكن ملاحظة أن اتحاد حوادث بسيطة هو حوادث مركبة. في المثال السابق (تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات) تسمى الحادثتان A_3 وA_4 حادثتين بسيطتين، والحادثتان A_1 , A_2 هما حادثتان مركبتان.

وفي تجربة رمي زهرة النرد مرتين إذا كانت $A = \{ (x , y) : x+y = 10 \}$ فإن الحادثة $A = \{ (4,6) , (5,5) , (6,4) \}$

هي حادثة مركبة، وهي اتحاد ثلاث حوادث بسيطة:

$$A = \{ (4,6) \} , \{ (5,5) \} , \{ (6,4) \}$$

الحادثة المستحيلة (impossible): تسمى المجموعة الخالية بالحادثة المستحيلة؛ لأنها تمثل الحالة التي لايكون للتجربة نتائج مثل حادثة ظهور الرقم ٧ عند رمي قطعة نرد.

الحادثة المؤكدة (certain or sure): هي مجموعة جميع النتائج الممكنة S، وكذلك حادثة ظهور عدد صحيح موجب أقل من ٧ في تجربة رمي زهرة النرد هي حادثة مؤكدة الحدوث.

مثال ٢,٢,٢

إذا كان فراغ العينة لتجربة ما معرفا كما يلي $S = \{ a , b , c \}$، وكانت المجموعات التالية:

$$\Phi , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a , b\} , \{a , c\} , \{b , c\} , \{a , b , c\}$$

تمثل كل المجموعات الجزيئية الممكنة من فراغ العينة S ، وتسمى كل مجموعة من هذه المجموعات الجزيئية حادثة (أو حدث). المجموعة الجزيئية $\{ a , b , c \}$ هي فراغ العينة، وهي حدث في الوقت نفسه؛ أي أنه يوجد الحدث المكون من فراغ العينة S دائما ويسمى بالحدث المؤكد. المجموعة الجزيئية الخالية Φ هي

أيضا حدث، وتسمى بالحدث المستحيل لأنه لايمكن ظهوره أو حدوثه.

نلاحظ من المثال ٢ ,٢ ,٢ أن فراغ العينة S لتجربة ما والمكون من n نقطة معينة يحتوي علـى 2^n مجموعـة جزئية مختلفـة (حوادث بسيطة ومركبـة) بالإضافـة إلى المجموعة الخالية Φ وفراغ العينة S .

الحوادث المتنافية: يقال إن الحادثتين A , B متنافيتان أو متمانعتان (mutually exclusive) أو منفصلتان (disjoint) إذا لم تظهرا في نفس الوقت؛ أي لاتحتـوي الحادثتان على أية نقاط أو عناصرمشتركة. وبعبارة أخرى، إذا كان وقوع إحداهما يمنع أو ينفي وقوع الأخرى؛ أي أن $A \cap B = \Phi$. فمثلا عندما نرمي قطعة معدنية مرة واحدة قد نحصل على الصورة (H) أو الكتابة (T) ، ولكن ليس على كليهما؛ ولذا يمكن وصف الحادثتين H,T بأنهما متنافيتان أو متمانعتان. وكذلك في تجربة إلقاء قطعة نرد، فإن جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة هي نواتج متنافية لأننا قد نحصل على واحد فقط من جملة ٦ نواتـج: {1.2.3.4.5.6}، وبالمثل في تجربـة تحديد نوع مولود جديد - في حالة الولادة - قد يكون المولود ذكرا أو أنثى وليس كليهما.

إذا ظهرت الحادثتان A , B في الوقت نفسه (أو في آن واحد) فإن الحادثتين تكونان غير متنافيتين، ومثال ذلك عند سحب ورقة من ٥٢ ورقة من ورق اللعب فإن الورقة المسحوبة يمكن أن تكون صورة ملك وشكل ماسة (ديمن)، عنـدهـا نصف هاتين الحادثتين المتلازمتين بأنهما «حادثتان غير متنافيتين»، وكذلك الحال بالنسبة لحوادث التضخم والركود (inflation and recession) في الاقتصاد هي حوادث غير متنافية.

الحوادث المتماثلة أو متساوية الفرص:يقال إن الحادثتين A , B متساويتان أو متكافئتان (equally likely) في فرصة الحدوث إذا كان الحدث A متساويا في فرصة حدوثه مع الحدث B. وبعبارة أخرى، يقال بأن الحادثتين متماثلتـان إذا كانت إمكانية حدوثهما متساوية.

وبصورة عامة، إذا كانت لدينا تجربة إحصائية عشوائية لها فراغ عيـنـة S

يحتوي على عدد n من نقاط العينة؛ أي أن عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو n ، وكانت هذه النتائج متساوية في إمكانية الحدوث، أي أن لكل نتيجة فرصة الحدوث مثل أي نتيجة أخرى، فإن هذه النتائج متساوية الفرص (متماثلة).

يسمى فراغ العينة S في هذه الحالة بفراغ العينة ذي الفرص المتساوية؛ فمثلا في تجربة رمي قطعة نقود قد نجد أن الصورة (H) لها نفس فرصة ظهور الكتابة (T) ومعدل الحدوث (أو الظهور) لكل حدث يتوقـع أن يكون $\frac{١}{٢}$، وفراغ العينة هـو $S = \{H , T\}$، ويسمى فراغ عينة باحتمالات متساوية (فرص متساوية).

ملحوظة: يجب ملاحظة أن الحوادث لاتعدو عن كونها مجموعات جزئية مـن فراغ العينـة S، فإن العمليات الجبرية على المجموعات يمكن تطبيقهـا عـلـى الحوادث.

الفراغ الاحتمالي: إذا كانـت $\mathfrak{I}$ سيـجمـا جـبـر (جـبـر بـوريـل) المعـرف على فـراغ العـيـنـة S وكانت P دالة احـتمـال على $\mathfrak{I}$، فإن الثـلاثي $(S , \mathfrak{I} , P)$ يـسمـى فراغا احـتمـاليًا قيـاسيًا (probability measure space) أو يسمى باختصار فراغا احتماليًا (probability space). سندرس تعريف دالة الاحتمال بشيء من التفصيل في تعريف (٣ , ٣ , ٢) وما بعدها.

الحادثة مستحيلة الحدوث بالنسبة إلى الاحتمـال P: إذا كان $(S , \mathfrak{I} , P)$ فراغا احتماليًا معطى، وكانت $A \in \mathfrak{I}$ بحيـث إن $P(A) = 0$ فإن المجموعة A تسمى حادثة مستحيلة الحدوث بالنسبة إلى P ، ويقال إنها تساوي الحادثة Φ تقريبا في كل مكان.

الحادثة مؤكدة الحدوث بالنسبة إلى P: إذا كان $(S , \mathfrak{I} , P)$ فراغا احتماليًا، وكانت $A \in \mathfrak{I}$ بحيث إن $P(A) = 1$ فإن المجموعة A تسمى حادثة مؤكدة الحدوث بالنسبة إلى الاحتمال P ، ويقال إنها مؤكدة الحدوث تقريبا في كل مكان؛ أي أن $A = S \Rightarrow P(A) = P(S) = 1$.

تساوي حادثتين باحتمـال 1: إذا كان لدينا مجموعتـان A , B في الفراغ الاحتمالي $(S , \mathfrak{I} , P)$، وكانت $A , B \in \mathfrak{I}$ ، وكان $P(A + B - AB) = 0$ فإن الحادثة

A تساوي الحادثة B باحتمال 1، ويقال إنهما متساويتان تقريبا في كل مكان.

٢,٣ تعريف الاحتمال

يمكن تعريف الاحتمال على أنه فرصة حدوث أو ظهور حادثة في تجربة ما؛ أي نسبة تحقق حادثة معينة عند إجراء محاولات متعددة ضمن تجربة شاملة بغرض دراستها. أو بمعنى آخر هو عدد المرات المتوقع الحصول فيها على الحادثة محل الدراسة عند إجراء التجربة. ويقاس الاحتمال بمقياس نهايته الصغرى الصفر ونهايته العليا وهي الواحد الصحيح؛ أي أن قيمة الاحتمال عادة عبارة عن كسر يقع بين الصفر والواحد الصحيح، بمعنى أنه إذا كان من المؤكد وقوع حدث ما؛ فدرجة الاحتمال هي واحد صحيح. أما إذا كان من المؤكد عدم حدوثه فدرجة الاحتمال هي صفر؛ فمثلا احتمال أن يعيش شخص ما إذاتوقف قلبه عن العمل هو صفر، واحتمال وفاة شخص ما في يوم ما هو ١.

توجد عدة تعاريف للاحتمال ومن جملتها ما يلي:

١,٣,٢ التعريف التقليدي للاحتمال

إذا كان هناك تجربة إحصائية معينة، وفراغ العينة لهذه التجربة S يحتوي على n من النتائج الممكنة التي لها فرص حدوث متساوية. وإذا كان الحدث A يمثل مجموعة جزيئية من فراغ العينة S ويحتوي على m من النتائج، فإن احتمال ظهور الحدث A، ويرمز له بالرمز P(A)، ويعرف كما يلي:

$$P(A) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } A}{\text{عدد نواتج فراغ العينة } S} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}$$

يوصف هذا التعريف بأنه كلاسيكي (classical) ويرجع للعالم الفرنسي لابلاس (Laplace) ويستخدم عادة في التجارب الإحصائية التي يتوافر فيها عدد نقاط فراغ العينة n(S)، وعدد نقاط حادثة ما مأخوذة من فراغ العينة S. ومما يؤخذ على هذا

التعريف ما يلي:

(أ) يتطلب أن تكون جميع النتائج الممكنة ذات فرص حدوث متـساويـة، أو احتمالات متساوية؛ أي يفترض أن يكون هناك معرفة سابقة بمعنى الاحتـمـال، ولذلك لايمكن تطبيق هذا التعريف في حالة عدم تحقق فرضيـة الاحـتـمـالات المتساوية.

(ب) يصبح هذا التعريف عديم المعنى إذا كان عدد النتائج الممكنة غير نهائي.

٢,٣,٢ التعريف النسبي للاحتمال

إذا قمنا بإجراء تجربة عشوائية عدد n مرة، وكان بالإمكان مشاهدة الحدث A عدد m مرة، فإن احتمال ظهور الحدث A يرمز له بالرمز P(A) ويمكن تعريفه بنهاية التكرار النسبي (relative frequency) $\frac{m}{n}$ حيث n تؤول إلى ما لانهاية ∞؛ أي أن:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

يعني ذلك أنه كلما زادت n إلى ما لانهاية، فإن التكرار النسبـي $\frac{m}{n}$ يصبح أكثـر استقرارا عند القيمة العددية P(A). فمثلا إذا قمنا برمي قطعة نقود عدة مرات، فإننا قد نلاحظ أن قيمة التكرار النسبي $\frac{m}{n}$ متذبذبة حول 0.5 كلما ازداد عدد الرميات.

يسمى هذا التعريف أيضا بالتعريف التجريبي (empirical) أو التطبيقي للاحتمـال؛ لأنه يعتمد على مشاهدات أو ملاحظات تجربة ما. من عيوب هذا التعريف أن قيمة التكرار النسبي $\frac{m}{n}$ ليست وحيدة.

٢,٣,٣ التعريف الرياضي للاحتمال

سوف نتعرض هنا لتعريف دالة الاحتمال (probability function) أو ما يسمى «دالة الاحتمال» على المجموعة S المعرف عليها جبر بوريل $\mathfrak{I}$ أي هي الدالة $P : \mathfrak{I} \longrightarrow R$ التي تحقق الفرضيات التالية :

الفرضية الأولى : لكل $A \in \mathfrak{I}$ ، $0 \le P(A)$،

الفرضية الثانية : للحدث المؤكد S نجد أن $P(S) = 1$.

الفرضية الثالثة : إذا كانت $A_1 , A_2 , \ldots$ متتابعة من المجموعات المتنافية التي تنتمي إلى $\mathfrak{I}$، أي أن :

$$A_i \cap A_j = \Phi , \ \forall \ i \neq j = 1 , 2 , \ldots$$

وكان أيضا

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{I}$$

فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

من الملاحظ أن الفرضية الأولى تحدد احتمال أن ناتج التجربة نقطة في A هو عدد ما بين الصفر والواحد الصحيح، والفرضيةالثانية تؤكد أنه، باحتمال يساوي الواحد الصحيح، ناتج التجربة هو نقطة فراغ العينة، والفرضية الثالثة تحدد أنه لأي متتابعة من الحوادث المتنافية فإن احتمال ظهور واحد على الأقل من هذه الحوادث هو مجموع احتمالاتها.

يسمى التعريف السابق بالتعريف الرياضي (mathematical) للاحتمال ويعد الطريقة الرياضية الحديثة إلى نظرية الاحتمالات.

٤ , ٢ أمثلة على الاحتمالات

مـثـال ١ , ٤ , ٢

إذا كانت $S = \{1, 2\}$ ، وكانت $\mathfrak{S}$ هي عائلة لكل المجموعات الجزئيـة المعرفة على S حيث:

$$\mathfrak{S} = \left\{ \Phi , S , \{1\} , \{2\} \right\}$$

فإنه يمكن تعريف دالة احتمال P عليها كالتالي :

$$P(\{1\}) = P_1 \quad , \; P(\{2\}) = P_2$$

بحيث إن P_1 ، P_2 أعداد موجبة تحقق الشرط $P_1 + P_2 = 1$.
إذا كان عدد عناصر فراغ العيـنـة S محدودة، وكانت الحوادث البسيـطـة فـي S متماثلة، فإن الدالة

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تمثل اقتران احتمال لأنها تحقق الفرضيات الواردة في التعريف السابق.

مـثـال ٢ , ٤ , ٢

رمينا قطعة نقود ثلاث مرات، ما احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل؟

الحـل : في تجربة رمي قطعة النقود ثلاث مرات نجد أن فراغ العينة S هو

$$S = \{ HHH , HHT , HTH , THH , HTT , THT , TTH , TTT \}$$

وأن عدد عناصر فراغ العينة S يساوي 8 (حيث إن $8 = 2^3 = 2^n$)، ويلاحظ أن فراغ العيـنـة S هو فراغ ذو احتمالات متساوية؛ أي أن للحوادث البسيطـة فـرص حدوث متساوية؛ أي أنه لكل نقطة عينة الاحتمال $\frac{1}{8}$.

ليكن الحدث A يمثل ظهور صورة واحدة على الأقل :

$$A = \{ HHH , HHT , HTH , THH , HTT , THT , TTH \}$$

نلاحظ أيضا أن عدد عناصر الحدث A ، وليكن n(A) يساوي 7.

إذن من تعريف الاحتمال نجد أن

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

مثال ٣, ٤, ٢

يدرس في مقرر الإحصاء التطبيقي 20 طالبا وهم : 5 من قسم العلوم الصحية، 4 من قسم علوم الحياة، 8 من قسم الفيزياء، 3 من قسم الكيمياء. اختير طالب بطريقة عشوائية من هذه المجموعات لتمثيلهم في قسم الرياضيات لإبداء رأيهم حول ملاءمة المقرر لهذه التخصصات. أوجد احتمال أن يكون هذا الطالب:

(أ) من قسم الأحياء.

(ب) من قسم الكيمياء.

(جـ) من قسمي الفيزياء والكيمياء.

الحل :

(أ) احتمال كون الطالب المختار من قسم علم الأحياء:

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{عدد الطلبة في قسم الأحياء}}{\text{عدد الطلبة الكلى}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

(ب)احتمال كون الطالب المختار من قسم الكيمياء:

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{عدد الطلبة في قسم الكيمياء}}{\text{عدد الطلبة الكلى}} = \frac{3}{20}$$

(جـ)احتمال كون الطالب المختارمن قسمي الكيمياء والفيزياء:

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{عدد الطلبة في قسمي الكيمياء والفيزياء}}{\text{عدد الطلبة الكلي}} = \frac{11}{20}$$

مثـال ٤ , ٤ , ٢

يُراد توظيف 3 أشخاص في مصلحة حكومية من بين 15 متقدما للعمل بها، منهم 8 من خريجي عام ١٤١٥هـ، 7 من خريجي عام ١٤١٦هـ، ومؤهلات جميع المتقدمين العلمية متساوية. إذا اختير ثلاثة بطريقة عشوائية، فأوجد احتمال ما يلي:

(أ) أن يكون الجميع من خريجي عام ١٤١٥ هـ

(ب) اختيار شخص واحد على الأقل من خريجي عام ١٤١٦ هـ.

الحـل :

نلاحظ أن فراغ العينة S يحتوي على $455 = \binom{15}{3}$ نقاط عينة، وهي عدد الطرق الممكنة لاختيار 3 من 15 متقدما.

(أ) نفرض أن الحـدث A يمثل الثلاثة المختارين من عام ١٤١٥ هـ. يحتوي الحدث A على$56 = \binom{8}{3}$ نقاط عينة، وهي عدد الطرق الممكنة لاختيار 3 من خريجي عام ١٤١٥ هـ من بين 8 من خريجي عام ١٤١٥ هـ.

إذن

$$P\left(\text{اختيار ثلاثة من خريجي عام ١٤١٥ هـ}\right) = P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{56}{455} = \frac{8}{27}$$

(ب) اختيار واحد على الأقل من خريجي عام ١٤١٦ هـ؛ أي اختـيـار

واحد، أو اثنين، أو ثلاثة من خريجي ١٤١٦هـ، وليكن الحدث B يمثل اختيار شخص واحد من عام ١٤١٦هـ على الأقل. عندئذ يكون عدد عناصر B هو

$$n(B) = \binom{7}{1}\binom{8}{2} + \binom{7}{2}\binom{8}{1} + \binom{7}{3}\binom{8}{0} = 196 + 168 + 35 = 399$$

إذن

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{399}{455} = \frac{59}{65} = 0.877$$

= (اختيار واحد على الأقل من خريجي عام ١٤١٦هـ) P

مثال ٥,٤,٢

يحتوي صندوق على 6 كرات بيضاء، 4 كرات سوداء. إذا سحبت 6 كرات بطريقة عشوائية، فما احتمال ظهور ثلاث كرات بيضاء و 3 كرات سوداء ؟

الحل :

نلاحظ أن عدد نقاط فراغ العينة S هو $210 = \binom{10}{6}$. إذا كان الحدث A يمثل ظهور 3 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء، فإن عدد نقاط العينة في الحدث A هو $80 = \binom{6}{3}\binom{4}{3}$.

عندئذ يكون احتمال الحدث A كما يلي :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{3}}{\binom{10}{6}} = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$$

مـثـال ٦ , ٤ , ٢

لاحظنا عدد الطلبة القادمين إلى مكتب القبول والتسجيل بالجامعة في فترة زمنية قدرها t ساعة، وكانت $S = \{0, 1, 2, ...\}$. كان جبر بوريل المعرف على S المكون من كل المجموعات الجزئية من S هو $\mathfrak{I}$. عرفنا على هذا الجبر $\mathfrak{I}$ الدالة التالية:

$$P_k = P\{k\} = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, ... \quad , \quad \lambda > 0 \ .$$

(أ) هل يمكن أن تكون الدالة P دالة احتمال على $\mathfrak{I}$ ؟

(ب) إذا كان الحـدث A يمثل وصـول طالب على الأكثـر في غضون 15 دقيقة، فما احتمال الحـدث A؟

الحـل:

(أ) حيث إن

$$P_k = P\{k\} = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, ... \quad , \quad \lambda > 0 \ .$$

هي دالة كتـلة احتمـال في عملية بواسـون في (λt) التي سوف نتعرض لها فيما بعد وعليه نجد أن :

(١) $$0 \le P(A) \le 1 ;$$

$$P(S) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = e^{-\lambda t} \sum_{0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1 \; ; \qquad (٢)$$

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} P_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \qquad (٣)$$

أي أن P دالة احتمال تحقق الفرضيات الواجب توافرها في أية دالة احتمال.

(ب) إذا كان { طالب على الأكثر يصل في غضون 15 دقيقة } = A فإن :

$$P(A) = P\{0,1\} = e^{\frac{-\lambda}{4}} + e^{\frac{-\lambda}{4}} \frac{\left(\frac{\lambda}{4}\right)}{1!} = e^{\frac{-\lambda}{4}}\left(1 + \frac{\lambda}{4}\right)$$

يجب ملاحظة أن $t = \frac{1}{4}$ (ساعة).

مـثـال ٧ , ٤ , ٢

تملك شركة موزعة للحاسبات الآليـة 5 أجهزة، ويوجد من هذه الأجهـزة جهازان معيبان فنيا. أرسلت كلية التربية بجامعة الملك سعود طلبية تتضمن الرغبة في شراء جهازين، فقامت الشركة بطريقة عشوائية بإرسال جهازين من الأجـهـزة الخمسة. أوجد احتمال أن يكون الجهازان في حالة سليمة.

الحـل:

نفرض أن الجهازين اللذين بهما عطل (المعيبان) هما D_1, D_2 وأن الثلاثة الأخرى السليمة هي G_1 , G_2 , G_3 . نلاحظ أن كل نقطة عينة تكون في صورة إرسال جهازين سليمين أو معيبين، أو واحد سليم وآخر معيب، ويمكننا تعريـف نقاط العينة (الحوادث البسيطة) التالية:

$$E_1 = \{D_1 , D_2\} , E_2 = \{D_1 , G_1\} , E_3 = \{D_1 , G_2\} , E_4 = \{D_1 , G_3\}$$
$$E_5 = \{D_2 , G_1\} , E_6 = \{D_2 , G_2\} , E_7 = \{D_2 , G_3\} , E_8 = \{G_1 , G_2\}$$
$$E_9 = \{G_1 , G_3\} , E_{10} = \{G_2 , G_3\}$$

أي أنه توجد 10 نقاط عينة وأن فراغ العينة S هو

$$S = \{E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 , E_6 , E_7 , E_8 , E_9 , E_{10}\}$$

نفرض أن الحدث A يمثل الأجهزة السليمة، ويمكن تعريفه كما يلي (من فـراغ العينة):

$$A = \{E_8 , E_9 , E_{10}\}$$

وحيث إن الاختيار قد تم بطريقة عشوائية، فإن فراغ العينة S هو فراغ ذو احتمالات متساوية؛ أي أن كلا من الحوادث البسيطة (نقاط العينة) $E_i \; , \; i = 1 , \dots , 10$ له نفس فرصة الاختيار؛ أي أن:

$$P(E_i) = \frac{1}{10} \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , 10$$

من الواضح أن الحدث A هو اتحاد E_8 , E_9 , E_{10} ؛ أي أن $A = E_8 \cup E_9 \cup E_{10}$

إذن $P(\text{الجهازان سليمان}) = P(A) = P(E_8) + P(E_9) + P(E_{10}) = \frac{3}{10}$

مـثـال ٨ , ٤ , ٢

يوجد في إحدى الأسر 10 بنات جميلات، 3 منهن يحفظن القرآن الكريـم، تقدم لوالدهن شابان على خلق قويم يطلبان الزواج. اختيرت بنتان بطريقة عشوائية، فما احتمال أن تكون :

(أ) البنتان ممن يحفظن القرآن الكريم؟

(ب) البنتان لاتحفظان القرآن الكريم؟

(جـ) بنت واحدة على الأقل تحفظ القرآن الكريم؟

الحـل :

من الواضح أن احتمال اختيار بنت واحدة بطريقة عشـوائـيـة هـو $\frac{1}{10}$ ، احتمال اختيار بنت تحفظ القرآن هو $\frac{1}{3}$.

(أ) نفرض أن الحادثة A تمثل «البنتان تحفظان القرآن الكريم»، ويكون احتمال الحادثة A هو :

$$P(A) = \binom{3}{2} \Big/ \binom{10}{2}$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{10} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

(ب) نفرض أن الحادثة B تمثل أن «البنتان لاتحفظان القرآن»، ويـكـون احتمال الحادثة B هو :

$$P(B) = \binom{7}{2} \Big/ \binom{10}{2}$$

$$P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

(جـ) نفرض أن الحادثـة C تمثل «اختيار بنت واحدة على الأقل مـمـن يحفظن القرآن»، ويكون احتمال الحادثة C هو :

$$P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{8}{10} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

٥,٢ نظريات الاحتمال

سوف نحاول إثبات بعض النظريات المتعلقة بالاحتمال التي يمكن استخدامها

في كثير من التطبيقات. وتحمل هذه النظريات بعض الخواص المهمة لدالة الاحتمال التي تتكرر الحاجة إلى استخدامها في الفصول القادمة من الكتاب.

نـظريـة ١,٥,٢

احتمال المجموعة الخاليةΦ هو صفر، أو احتمال الحدث المستحيل Φ هو صفر؛ أي أن :

$$P(\Phi) = 0$$

البرهان:

نفرض أن:

$$A_1 = S \ , \ A_2 = \Phi \ , \ A_3 = \Phi \ , \ .... \quad \left(A_1 = S \ , \ \sum_{i=2}^{\infty} A_i = \Phi \right)$$

يمكن تعريف الحدث S بصورة عامة كما يلي:

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

وباستخدام الفرضية الثالثة للاحتمال يكون :

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) = P(S) + P(\Phi)$$

إذن

$$P(S) = P(S) + P(\Phi)$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$P(\Phi) = P(S) - P(S) = 0$$

مثـال ١,٥,٢

إذا كانت الدالة $\phi(t)$ تعرف دالة احتمال على مجموعة الأعداد الحقيقيـة R باستخدام جبر بوريل العادي على مجموعة الأعداد الحقيقية، وكانت الدالة $\phi_1(t)$ معرفة كالتالي :

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 0, & t \notin \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right] \\ \sin t\,, & t \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

حيث يمكن تعريف $\phi(t)$ كما يلي :

$$\phi(t) = \frac{\phi_1(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)\, dt}$$

وحيث إن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \;\, dt = \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تصبح الدالة $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0\,, & t \notin \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right] \\ \dfrac{\sin t}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\,, & t \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

يمكن باستخدام الدالـة $\phi(t)$ تعريف دالة احتمال على جبر بوريل على مجموعـة الأعداد الحقيقية كما يلي:

$$P(A) = \int_A \phi(t)\, dt$$

إذا كانت $A = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ فإن الحادثة $R - A$ تسمى حادثة مستحيلة، وباستخدام النظرية ١,٥,٢ فإن احتمال $R - A$ يساوي صفرا؛ أي أن :

$$P(R - A) = \int_{R-A} \phi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} \phi(t)\, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \phi(t)\, dt = 0$$

أي أن

$$P(R - A) = P(\Phi) = 0$$

تسمى الحادثة $R - A$ حادثة مستحيلة الحدوث بالنسبة للاحتمال P.

نـظريـة ٢,٥,٢

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ متتابعة من الحوادث المتنافية التي تنتمي إلى $\mathfrak{I}$ فإن

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

البرهان:

نفرض أن $A_{n+1} = \Phi, A_{n+2} = \Phi, \ldots$

إذن $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots \in \mathfrak{I}$

ومن تعريف جبر بوريل (الشرط (ج)) نجد أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{I}$ ، ولكن

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \left[\bigcup_{i=n+1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \Phi = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

إذن

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

باستخدام الفرضية الثالثة من فرضيات الاحتمال نحصل على:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

أي أن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

مثال ٢,٥,٢

تقدم 5 أشخاص لشغل وظيفة في الجامعة. اختير شخصان من الأشخاص الخمسة بطريقة عشوائية. إذا علم أن المتقدمين للوظيفة يتفاوتون في مهاراتهم الوظيفية؛ فالأول أحسن أداء، والثاني يأتي في المرتبة الثانية من حيث الأداء . . . وهكذا بالنسبة للمتقدمين الثالث والرابع والخامس . إذا فرض كذلك أن ترتيب الأداء الوظيفي غير معلوم لدى الجامعة. لنفرض أن الحدث A يمثل اختيار الجامعة لشخصين أحدهما أفضل المتقدمين والآخر من أقل اثنين أداء، والحدث B يمثل اختيار الجامعة لواحد من أفضل المتقدمين على الأقل.

ما احتمال الحادثتين A , B ؟

الحـل :

التجربة هي اختيار شخصين من بين 5 أشخاص بطريقة عشوائية.
نلاحظ وجود عدد 10 حوادث بسيطة أو نقاط عينة والمعرفة علـى صـورة زوج مرتب (i , j)، وهي :

$$E_1=(1,2)\ ,\ E_2=(1,3)\ ,\ E_3=(1,4)\ ,\ E_4=(1,5)\ ,\ E_5=(2,3)$$

$$E_6=(2,4)\ ,\ E_7=(2,5)\ ,\ E_8=(3,4)\ ,\ E_9=(3,5)\ ,\ E_{10}=(4,5)$$

تم الاختيار بطريقة عشوائية ولذا فإن فراغ العينـة S المكون من 10 نقاط عينة $(E_i\ ,\ i = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ 10)$ هو فراغ عينة ذو احتمالات متساويـة؛ أي أن كـل نقطة عينة لها نفس فرصة الاختيار ولذلك يكون :

$$P(E_i) = \frac{1}{10}\quad ,\quad i = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ 10$$

نلاحظ أيضا أن الحدث B يتضمن حدوث الحوادث التالية:

$$E_1\ ,\ E_2\ ,\ E_3\ ,\ E_4\ ,\ E_5\ ,\ E_6\ ,\ E_7$$

أي أن الحدث B هو اتحاد هذه الحوادث.

$$B = \bigcup_{i=1}^{7} E_i$$

يمكن، باستخدام النظرية (٢ , ٥ , ٢)، كتابة احتمال الحدث B كما يلي:

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{7} E_i\right) = \sum_{i=1}^{7} P(E_i) = \sum_{i=1}^{7} \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

الحدث A هو كذلك اتحاد الحدثين $E_3\ ,\ E_4$، ومن النظرية ٢ , ٥ , ٢ نحصل على:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=3}^{4} E_i\right) = \sum_{i=3}^{4} P(E_i) = \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$

يوضح المثال السابق كيفية حساب احتمال حدث ما، في تجربة ما، باستخـدام

طريقة نقطة العينة.

نظرية ٣ , ٥ , ٢

احتمال عدم ظهور حدث ما يساوي 1 مطروحا منه احتمال ظهور ذلك الحدث؛ أي أنه إذا كانت المجموعة A ومكملتها $\overline{A}$ مجموعتين جزئيتين من فراغ العينة S فإن :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

البرهان:

يمكن ملاحظة أن الحدثين A و $\overline{A}$ حدثان متنافيان حيث :

$$A \cap \overline{A} = \Phi , A \cup \overline{A} = S$$

ومن ذلك ينتج (باستخدام دالة الاحتمال) أن :

$$P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(S)$$

باستخدام نظرية ٢ , ٥ , ٢ نجد أن:

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(S)$$

وباستخدام الفرضية الثانية من فرضيات الاحتمال نحصل على :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

ومن ذلك نحصل على المطلوب وهو :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

يكثر استخدام هذه النظرية في ذلك النوع من التجارب التي يكون فيها فراغ العينة S يحتوي على عدد كبير من نقاط العينة كما سنرى في المثال التوضيحي التالي:

مثال ٣ , ٥ , ٢

إذا رميت قطعة معدنية 4 مرات، فما احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل؟

الحل:

فراغ العينة (S في هذه التجربة) يحتوي علـى $n(S) = 2^n = 2^4 = 16$ نقطة عينة، وكل نقطة لها فرصة الظهور نفسها.

افرض أن الحـدث A يمثل ظهور صورة واحـدة (H) على الأقل. إذن يحتوي الحدث A على عدد كبير من نقاط العينة الأمر الذي يحتاج منا إلى بعض الوقت لحصرها. يمكن في مثل هذه الحالة النظر إلى الحدث المكمل للحدث A . من الواضح أنه يمكن تعريف الحدث المكمل $\overline{A}$ بسهولة من هذه التجربة وهو عدم ظهور الصورة؛ أي أن:

$$\overline{A} = \{TTTT\}$$

وبذلك يكون احتمال $\overline{A}$

$$P(\overline{A}) = P(\{\,TTTT\,\}) = \frac{n(\overline{A})}{n(S)} = \frac{1}{16}$$

باستخدام نظرية التكميل ٣ , ٥ , ٢ : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ نحصل على:

$$\frac{1}{16} = 1 - P(A)$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

نـظريـة ٤ , ٥ , ٢ (احتمال الحادثة الجزئي)

إذا كان الحدث B يحتوي الحادثة A ، فإن احتمال الحدث A ليس أكبر من احتمال الحدث B؛ أي أنه إذا كان A , B حدثين جزئيين من فراغ العينة S بحيث إن $A \subset B$ فإن $P(B)\ \ P(A)$.

البرهان:

لكل $A \subset B$ ، فإن الحادثة B يمكن تجزئتها إلى الحادثتين $B \cap A$, $B \cap \overline{A}$؛ أي أن :

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

وحيث إن $A \subset B$ ، فإن $A \cap B = A$, $B = A \cup (B \cap \overline{A})$

باستخدام دالة الاحتمال والنظرية ٢,٥,٢ نجد أن :

$$P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$$

من المعلوم في الفرضية الأولى للاحتمال نجد أن :

$$P(B \cap \overline{A}) \geq 0$$

وعليه يمكن استنتاج أن

$$P(A) \leq P(B)$$

مثال ٢,٥,٤

في تجربة رمي قطعة نرد يحتوي فراغ العينة S على 6 نقاط عينة $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ حيث إن فراغ العينة S فراغ ذو احتمالات متساوية؛ أي أن كل نقطة لها نفس الاحتمال: $\frac{1}{6}$.

إذا كانت الحادثة A تمثل ظهور العدد 1؛ أي أن $A = \{1\}$ ، وكانت الحادثة B تمثل ظهور الأعداد الفردية؛ أي أن $B = \{1, 3, 5\}$.

من الواضح أن احتمال A هو $\frac{1}{6}$ واحتمال الحادثة B هو $\frac{3}{6}$ فعليه، وطبقا للنظرية ٢,٥,٤، تكون:

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{حيث} \quad A \subset B$$

نـظريـة ٥ , ٥ , ٢

إذا كانت A, B تنتميان إلى $\Im$ فإن :

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

$$P(A - B) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$$

البرهان:

يمكن تجزئة الحادثة A إلى حادثتين متنافيتين هما $A\overline{B}$, AB ؛ أي أن:

$$AB \cap A\overline{B} = \Phi \;,\;\; A = AB \cup A\overline{B}$$

باستخدام دالة الاحتمال والنظرية ٢ , ٥ , ٢ نجد أن

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

ومن الواضح أيضا أن

$$P(A - B) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$$

نـظريـة ٦ , ٥ , ٢ (قانون الجمع)

احتمال اتحاد أي حادثتين $A, B \in \Im$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

يلاحظ أن هذه النظرية تحدد العلاقة لاحتمال اتحاد حادثتين في صورة الاحتمالات الفردية واحتمال التقاطع.

البرهان:

يمكن تجزئة الحادثة $A \cup B$ إلى حادثين متنافيين هما $\overline{A}B$, A ؛ أي أن:

$$A \cap \overline{A}B = \Phi$$

$$A \cup \overline{A}B = A \cup B$$

باستخدام دالة الاحتمال يكون

$$P(A \cup B) = P(A \cup \overline{A}B)$$

باستخدام النظرية (٢,٥,٢) نحصل على :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}B)$$

ومن النظرية (٥,٥,٢) نحصل على

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال ٥,٥,٢

اختير عدد صحيح من أول 200 عدد صحيح موجب بطريقة عشوائية، وكان الحدث A يمثل العدد المختار الذي يقبل القسمة على 6، والحادثة B تمثل العدد المختار الذي يقبل القسمة على 8. لاحظ أن الحادثة $A \cap B$ تمثل العدد المختار الذي يقبل القسمة على 6 أو 8 ؛ أي يقبل القسمة على 24. ما احتمال أن يقبل العدد المختار القسمة على 6 أو 8؟

الحل:

نلاحظ أن فراغ العينة S هو $S = \{1 , 2 , ... , 200\}$

حيث إن الحدث A يمثل العدد الصحيح المختار الذي يقبل القسمة على 6 بدون باق؛ أي أن عدد عناصر الحدث A (عدد نقاط العينة) هي:

$$n(A) \approx \frac{200}{6} = 33$$

وحيث إن الحادثة B تمثل العدد الصحيح المختار الذي يقبل القسمة على 8، فإن عدد عناصر الحادثة B هو:

$$n(B) \approx \frac{200}{8} = 25$$

وحيث إن الحادثة $A \cap B$ تمثل العدد الصحيح المختار الذي يقبل القسمة على 24، فإن عدد عناصر الحادثة $A \cap B$ هو :

$$n(A \cap B) \approx \frac{200}{24} = 8$$

والآن يمكننا إيجاد الاحتمالات التالية :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{33}{200}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{25}{200}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{8}{200}$$

المطلوب هو إيجاد احتمال أن العدد الصحيح المختار يقبل القسمة على 6 أو 8 ؛ أي أن المطلوب هو إيجاد احتمال الحادثة A أو B ، أي إيجاد $P(A \cup B)$.

باستخدام النظرية (٦ , ٥ , ٢) السابقة، يمكن إيجاد $P(A \cup B)$ كما يلي :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{33}{200} + \frac{25}{200} - \frac{8}{200}$$

$$= \frac{58}{200} - \frac{8}{200} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

مـثـال ٦ , ٥ , ٢

طالب متفوق في مادتي الإحصاء والفيزياء، لكنه لم يوفق في الحصـول على تقدير "A" في أي من المواد الأخرى، علما بأن إمكانية حصوله على التقدير "A" في مادة الإحصاء هو 1 إلى 3 ؛ أي $\frac{1}{3}$، وإمكانية عدم حصوله على التقدير "A" في الفيزياء هو 1 إلى 4 أي $\frac{1}{4}$، وإمكانية عدم حصوله على التقدير "A" في

مادتي الإحصاء والفيزياء هــو 2 إلى 3 ؛ أي $\frac{2}{3}$. إذا كان تقييم الطالب لوضعه الدراسي صحيحا، فأوجد الاحتمالين التاليين:

(أ) حصوله على "A" مرة واحدة على الأقل.

(ب) عدم حصوله على "A" .

الحـل:

يمثل الحـدث B حصول الطالب على تقـديـر "A" في مادة الإحصــاء، يمثل الـحـدث C حصول الطالب عـلـى تـقـديـر "A" في مادة الفـيـزيـاء، يمثل الحدث BC حصول الطالب على تقدير "A" في مادة الإحصاء والفيزياء.

من معطيات السؤال نحصل على الاحتمالات التالية :

$$P(B) = \frac{3}{4} \quad , \quad P(C) = \frac{4}{5} \quad , \quad P(BC) = \frac{3}{5}$$

(أ) احتمال حصول الطالب على "A"مرة واحدة على الأقل هو عبــارة عن اتحاد الحادثتين B , C أي أن المطلوب هو $P(B \cup C)$.

باستخدام النظرية (٦ , ٥ , ٢) نجد أن

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = 0.95$$

(ب) المطلوب حساب احتمال عدم حصوله على "A"؛ أي أن المطلوب إيجاد احتمال مكملة الحدث $(B \cup C)$. باستخدام النظرية (٣ , ٥ , ٢) يكون :

$$P\left(\overline{B \cup C}\right) = 1 - P(B \cup C) = 1 - 0.95 = 0.05$$

مـثـال ٢,٥,٧

تقدم ثلاثة من حافظي كتاب الله الكريم إلى مسابقة حفظ وتلاوة القـرآن الكريم الدولية. إذا كان احتمال فوز الأول هو ضعف احتمال فوز الثاني واحتمال فوز الثاني ضعف احتمال فوز الثالث، فأوجد :

(أ) احتمال فوز الأول أو الثاني،

(ب) احتمال عدم فوز الأول أو الثاني.

الحـل:

(أ) نفرض أن المتسابقين الثلاثـة هـم A , B , C ؛حيث إن الحادثة A تمثل المتسابق الأول، والحادثة B تمثل الثاني، والحادثة C تمثل الثالث.

لنفرض أن احتمال حدوث C هو p؛ أي أن $P(C) = p$.

من ذلك يكون احتمال فوز المتسابق الثاني؛ أي احتمال الحادثة B هو $2p$ ؛ أي أن $P(B) = 2p$.

واحتمال فوز المتسابق الأول؛ أي احتمال حدوث A هو $4p$؛ أي أن $P(A) = 4p$.

سوف نفترض أن الحـوادث A , B , C حوادث متنافية فيكون تقاطعهما صـفـرا واتحادهما كامل فراغ العينة؛ أي أن:

$$P\left(A \cup B \cup C\right) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$= p + 2p + 4p = 1$$

ومن ذلك ينتج أن $p = \frac{1}{7}$ ، إذن

$$P(A) = 4p = \frac{4}{7} \ , \ P(B) = 2p = \frac{2}{7} \ , \ P(C) = p = \frac{1}{7}$$

نلاحظ أن المطلوب هو فوز الأول أو الثاني؛ أي إيجاد احتمال اتحاد الحدثين A ،B، ومن النظرية (٢,٥,٦) نجد أن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{2}{7} - 0 = \frac{6}{7}$$

(حيث إن $P(A \cap B) = 0$ لأن الحادثتين A, B متنافيتان وتقاطعهما هو Φ).

(ب) من النظرية (٣، ٥، ٢) يمكن إيجاد احتمال عدم فوز الأول أو الثاني؛ أي أن المطلوب هو احتمال مكملة الحدث $(A \cup B)$ فيكون :

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

ملاحظة:

يعطينا المثال السابق حالة خاصة يمكن استنتاجها من النظرية السابقة، وهي أنه إذا كانت الحادثتان A, B حادثتين متنافيتين (أي $A \cap B = \Phi$) فإن احتمال اتحادهما يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

وذلك لأن $P(A \cap B) = P(\Phi) = 0$

ملاحظة ١ , ٥ , ٢

يمكن تعميم النظرية (٦ , ٥ , ٢) الخاصة بقانون الجمع الاحتمالي لأكثر من حادثتين؛ فمثلا إذا كانت A_1, A_2, A_3 حوادث في فراغ العينة S، فإن احتمال ظهور واحد من هذه الحوادث في الأقل يعطى بالعلاقة التالية :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$- P(A_1 A_2) - P(A_2 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$$

وبصورة عامة يمكن إعطاء الصيغة التالية لأي k من الحوادث:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P\left(\bigcup A_i\right)$$
$$= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<} \sum_{j} P(A_i \cap A_j)$$
$$+ \sum_{i<} \sum_{j<} \sum_{k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{k+1} P\left(\bigcap A_i\right)$$

يمكن إثبات هذه الصورة العامة باستخدام الاستقراء الرياضي.

٦ , ٢ أمثلة متنوعة على نظريات الاحتمال

يحتوي هذا الفصل على ثلاثة أمثلة إضافية تطبيقية ومباشرة على نظريات الاحتمال السابقة.

مـثـال ١ , ٦ , ٢

إذا كان عدد المرضى المنومين في مستشفى عام خلال فترة زمنية معينة هو 1200 مريض، وكان منهم 750 مريضا أدخلوا عن طريق العيادات التخصصيـة، وبقية المرضى أدخلوا عن طريق سم الطوارئ، وإذا كانت الحادثة A تمثل عدد المرضى المنومين من العيادات التخصصية، فما احتمال أن يكون المريض منوما

عن طريق قسم الطوارئ؟

الحـل:

من الملاحظ أن المرضى الذين أدخلوا عن طريق قسم الطوارئ يمثلـون الحادثة المكملة للحادثة A، ويكون المطلوب هو احتمال مكملة الحادثة A؛ أي $P(\overline{A})$.

من النظرية (٣,٥,٢) نجـد أن $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ، وحيث إن $n(A) = 750$ عدد عناصر الحادثة A ، عندئذ يكون احتمال A هو :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{750}{1200} = 0.625$$

ومن ذلك نحصل على

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.625 = 0.375$$

مـثـال ٢,٦,٢

في تجربة رمي زهرتي نرد، ما احتمال أن يكون مجموع النقاط الظاهـرة على النردين 5 أو 11؟

الحـل :

من الواضح في هذه التجربة أن فراغ العينة S يحتوي على $2^n = 2^6 = 36$ نقطة عينة. لنفرض أن الحـادثـة A تمثل مجموع النقاط الظاهـرة، وهـو 5 ، والحادثة B تمثل مجموع النقاط الظاهرة وهو 11 فيكون :

$$A = \{ (5,6) , (6,5) \}$$

$$B = \{ (1,4) , (2,3) , (3,2) , (4,1) \}$$

ومن ذلك يكون احتمالا الحادثتين A , B هما :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{36} \quad , \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36}$$

المطلوب إيجاد احتمال أن مجـــموع النقط الظاهــرة هو 5 أو 11 وهو الذي يمثل اتحاد الحادثتين A, B ؛ أي أن المطلوب هو $P(A \cup B)$.

باستخدام النظرية (٦, ٥, ٢) نجد أن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

من الملاحظ أن الحادثتيــن A, B متنافيتان؛ حيث لاتحتويان على نقـط مشتركة؛ أي أن $A \cap B = \Phi$ ، ومن النظرية (١, ٥, ٢) فإنه يكون

$$P(A \cap B) = P(\Phi) = 0$$

إذن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مـثـال ٣, ٦, ٢

تقدم 25 طالبا للالتحاق بأحد أقسام جامعة الملك سعود فـي أحـد الـفـصـول الدراسية، كان منهم 10 من الطلاب العلمييــن، و 15 من الطلاب الأدبيين. علـم كذلك أن 17 منهم حاصلون على شهادة الثانوية العامة، و 8 من الحاصلين على الشهادة الثانوية المطورة. تفاصيل بيانات الطلبة في الجدول (١, ٢) التالي:

الشهادة الثانوية / التخصص	B_1 عامـــة	B_2 مطــورة	المجمـوع
أدبي A_1	7	3	10
علمي A_2	10	5	15
المجموع	17	8	25

الجدول رقم (١, ٢).

ما احتمال قبول طالب متخصص أدبي أو حاصل على الشهادة الثانوية المطورة؟

الحل :

نلاحظ من الجدول ما يلي :

الحادثة A_1 تمثل طلبة التخصص الأدبي.

الحادثة A_2 تمثل طلبة التخصص العلمي.

الحادثة B_1 تمثل الطلبة الحاصلين على الشهادة الثانوية العامة.

الحادثة B_2 تمثل الطلبة الحاصلين على الشهادة الثانوية المطورة.

نلاحظ كذلك أن

$$n(A_1) = 10 \ , n(A_2) = 15 \ , n(B_1) = 17 \ , n(B_2) = 8$$

من الواضح أن عدد عناصر طلبة التخصص الأدبي والحاصلين على الشهادة الثانوية المطورة يمثل عدد عناصر تقاطع الحادثتين A_2 , B_2 ويكون $n(A_2 \cap B_2) = 5$.

المطلوب احتمال قبول طالب من التخصص الأدبي أو حاصل على شهادة الثانوية المطورة والذي يمثل تحديدا احتمال اتحاد الحادثتين A_2 , B_2 ؛ أي أن:

$$P(A_2 \cup B_2) = P(A_2) + P(B_2) - P(A_2 \cap B_2)$$

$$= \frac{15}{25} + \frac{8}{25} - \frac{5}{25}$$

$$= \frac{18}{25} = 0.27$$

٢,٧ الاحتمال الشرطي

نحصل في تجربة رمي زهرة نرد على فراغ العينة $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. افرض أننا نريد احتمال الحادثة A التي تمثل ظهور العدد 6. إذا كان - قبل ظهور العدد 6 - لدينا مقولة تقول إن الحدث B يمثل ظهور الأعداد الزوجية في زهرة النرد. من الواضح أن هذه المعلومة التي تتمثل في ظهور الأعداد الزوجية قد تلغي ظهور الأعداد الفردية في زهرة النرد، ولذلك يقل عدد نقط فراغ العينة S، وعندها يختزل فراغ العينة S ليصبح محتويا فقط على 3 نقاط عينة هي 2, 4, 6؛ أي أن فراغ العينة S قد انحسر إلى $B = \{2, 4, 6\}$. عندئذ يكون احتمال الحادثة A في فراغ العينة المختصر B هو $\frac{1}{3}$، حيث إن كل نقطة في فراغ العينة المختصر B لها نفس فرصة الظهور. يسمى الاحتمال $\frac{1}{3}$ بالاحتمال الشرطي للحادثة A لأنه قد وجد بدلالة أو تحت الشرط أن زهرة النرد تعطي أعدادا زوجية عند عمليـة الرمي، ويمكننا كتابة هذا الاحتمال الشرطي على الصورة التالية :

$$P(\text{ظهور العدد 6 في زهرة النرد} \mid \text{ظهور الأعداد الزوجية في زهرة النرد}) = P(A \mid B) = \frac{1}{3}$$

يقرأ الرمز (|) بمعلومية أو بدلالة أو بشرط.

يمكننا - من المثال السابق - استنباط التعريف التالي :

نفرض أن $(S, \mathfrak{I}, P)$ فراغ عينة احتمالي معطى، وكانت $B \in \mathfrak{I}$ حادثة معطاة بحيث إن $P(B) > 0$ فإنه لكل $A \in \mathfrak{I}$ يمكن تعريف الاحتمال الشرطي للحادثة A بمعلومية الحادثة B ويرمز له بالرمز $P(A \mid B)$ كما يلي :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحـادثـة A هو قسمة الاحتمـال المشترك للحادثتيـن A ، B معا على احتمال الحادثة B منفردة.

١,٧,٢ بعض خواص الاحتمال الشرطي

فيما يلي نورد أهم خواص الاحتمال الشرطي التي يكثر استخدامها في حساب الاحتمال.

١- إذا كانت $B = A$، فإن: $P(A \mid B=A) = P(A \mid A) = 1$

وذلك لأن: $$P(A \mid A) = \frac{P(AA)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

٢- إذا كانت $A = S$ ، فإن $P(S \mid B) = 1$

لأن: $$P(S \mid B) = \frac{P(SB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

٣- إذا كانت $A = \Phi$ ، فإن:

$$P(\Phi \mid B) = \frac{P(B\Phi)}{P(B)} = \frac{P(\Phi)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

٤- إذا كانت $A \subset B$ ، فإن $P(A \mid B) \geq P(A)$ وذلك لأن

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} + \frac{P(B)}{P(B)} \geq P(A)$$

٥- إذا كان $AB = \Phi$ ، فإن $P(A \mid B) = 0$ ، وذلك لأن

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(\Phi)}{P(B)} = 0$$

٦- إذا كانت $A_1 A_2 = \Phi$, $A = A_1 + A_2$ ، فإن :

$$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$$

وذلك لأن

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = \frac{P((A_1 \cup A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B \cup A_2 B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)}$$

$$= P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$$

٧- نلاحظ أن دالة الاحتمال الشرطي $P(A | B)$ معرفة لكل عناصر جبر بوريل $\mathfrak{I}$ على المجموعـة S، ونلاحظ أن دالة الاحتمال الشرطي تحقق خواص دالـة الاحتمال وذلك بالرجوع إلى الخاصية (٢,٣,٦) أي أن الاحتمال الـشـرطـي يعرف على أنه دالة احتمال جديدة على جبر بوريل $\mathfrak{I}$ المعرف عليه دالة الاحتمال العادية (غير الشرطية). فعليه يمكننا، من ذلك، أن نجزم أن دالة الاحـتـمـال الشرطي للحادثة A بمعلومية الحادثة B،

$$P(A | B) \; ; \; P(B) > 0$$

تحقق كل خواص أو فرضيات دالة الاحتمال العادية.

٢,٧,٢ ملاحظات على الاحتمال الشرطي

(أ) إذا كان $P(B) = 0$ ، فإن الاحتمال الشرطي $P(A | B)$ يصبح غير معرف.

(ب) عند حساب الاحتمال الشرطي للحـادثـة A بمعلومية الحادثـة B نستخـدم العلاقة:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$= \left(\frac{\text{عدد نقاط العينة في الحدث AB}}{\text{عدد نقاط العينة في فراغ العينة S}}\right) \Big/ \left(\frac{\text{عدد نقاط العينة في الحدث B}}{\text{عدد نقاط العينة في فراغ العينة S}}\right)$$

$$= \frac{n(AB)/n(S)}{n(B)/n(S)} = \frac{n(AB)}{n(B)}$$

وذلك بفرض أن الحادثة S قابلة للعد.

(جـ) تحقق دالة الاحتمال الشرطي $P(A \mid B)$ نفس فرضيات دالة الاحتمال العادية.

الفرضية (أ) : لكل $A \in \mathfrak{J}$ نجد أن $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$

الفرضية (ب) : للحدث المؤكد S

$$P(S \mid B) = \frac{P(SB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

الفرضية (جـ) : إذا كانت $A_1 , A_2 , \ldots$ متتابعة من الحوادث المتنافية التي تنتمي إلى $\mathfrak{J}$، وكان $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Phi$ فإن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \frac{P\left(B \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(A_i \cap B\right)\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i \cap B\right)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i \mid B\right)$$

إذن

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i \mid B\right)$$

(د) دالة الاحتمال الشرطـي $P(A \mid B)$ تعرف دالة أخرى علـى فـراغ العينة S.

(هـ) يمكن حساب الاحتمال الشرطي $P(A \mid B)$ من فراغ العينة المختزل B أو من فراغ العينة الكلي S.

(و) لقد عرفنا الاحتمال لحادثة ما على أنه التكرار النسبي لتلك الحادثة، والاحتمال الشرطي يحافظ كذلك على مفهوم التكرار النسبي.

مثـال ١ ,٧ ,٢

إذا كانت التجربة هي سحـب 5 بطاقات مـن 25 بطاقة من ورق اللعب، وكانت عملية السحب تتم بطريقة عشوائية وبدون إرجاع البطاقة المسحوبة، وكانت الحادثة B تمثل البطاقات المسحوبة من نوع (سبيت)، وكانت الحادثـة A تمثل

سحب 4 بطاقات من نوع (سبيت) في الأقل، فما احتمال حصول الحادثة B بشرط حصول الحادثة A ؟

الحـل :

تمثل الحادثة A جميع البطاقات المسحوبة من نوع (سبيت) ، وتمثل الحادثةB سحـب 4 بطاقات من نوع (سبيت) عـلـى الأقـل.

يلاحظ أن $A \cap B = B$ ، والمطلوب هو إيجـاد $P(A \mid B)$

إذن من تعريف الاحتمال الشرطي يكون

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\binom{13}{5}\Big/\binom{52}{5}\Big/\binom{52}{5}}{\left[\binom{13}{4}\binom{39}{1} + \binom{13}{5}\binom{59}{0}\right]}$$

مـثـال ٢,٧,٢

كان احتمال حصول طالب على تقدير "A" في امتحان الفيزياء الأول $\frac{1}{2}$ ، واحتمال حصوله على تقدير "A" في امتحان الفيزياء الأول والثاني $\frac{1}{3}$. إذا كان هذا التقييم الأكاديمي صحيحا، فما احتمال حصوله على تقدير "A" في الامتحان الثاني بمعلومية حصوله على تقدير "A" في الامتحان الأول؟

الحـل :

لنفرض أن الحادثـة B هي حصول الطالب على تقديـر "A" في الامتحان الأول، وأن الحادثة C هي حصول الطالب على تقدير "A" في الامتحان الثاني.

من تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن:

$$P(C \mid B) = \frac{P(CB)}{P(B)}$$

$$= \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

مـثـال ٣, ٧, ٢

سجلت مدة صلاحية مصباح كهربائي بالساعات. إذا كان فراغ العينة S هو $S = [0, \infty)$ ، وكانت دالة الاحتمال P المعرفة على مجموعة من الحوادث في S تعطى بالعلاقة :

$$P(A) = \int_A \frac{1}{1200} e^{-\left(\frac{1}{1200}\right)x} dx$$

أوجد الاحتمالين التاليين :

(أ) أن يستمر المصباح الكهربائي 1,500 ساعة في الأقـل.

(ب) أن يستمر المصباح الكهربائي 3,000 ساعة على الأقل بمعلومية أنه قد استمر لمدة 1,500 ساعة.

الحـل :

نعلم أن فراغ العينة في هذه التجربة هو $S = [0, \infty)$ ، ودالة الاحتمال P المعرفة على مجموعة الحوادث في $(\mathfrak{I})$ S معطاة بالعلاقة:

$$P(A) = \int_A \frac{1}{1200} e^{-\left(\frac{1}{1200}\right)x} dx$$

(أ) يكون احتمال استمرار المصباح الكهربائي في الأقل 1,500 ساعة هو:

$$P(A) = P(\ [1500\ ,\ \infty)\ )$$

$$= \int_{1500}^{\infty} \frac{1}{1200} e^{-\left(\frac{1}{1200}\right)x} dx = -e^{-\left(\frac{1}{1200}\right)x}\Big|_{1500}^{\infty} = e^{-1.25}$$

(ب) يلاحظ أن احتمال استمرار المصباح الكهربائـي 3,000 ساعة على الأقل بمعلومية أنه استمـر 1,500 ســـاعة هو احتمال شرطي للحـــادثـة B بمعلــومية الحادثة A . لأن الحادثة B تمثل استمرار المصباح الكهربائي 3,000 ساعة على الأقل.

من تعريف الاحتمال الشرطي نحصل على :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(\ [1500,\infty) \cap [3000,\infty)\ )}{P(\ [1500,\infty))} = \frac{P(\ [3000,\infty))}{P(\ [1500,\infty))}$$

$$= \frac{\int_{3000}^{\infty} \frac{1}{1200} e^{-\left(\frac{1}{1200}\right)x} dx}{\int_{1500}^{\infty} \frac{1}{1200} e^{-\left(\frac{1}{1200}\right)x} dx} = \frac{e^{-2.5}}{e^{-1.25}} = e^{-1.25}$$

مثال ٤ , ٧ , ٢

في شركة للصرافة، 20% من الموظفين ذوي خبرة في المحاسبة، بينمـا

5% من الموظفين إداريون وذوو خبرة في المحاسبة. إذا كان الموظف ذا خبرة في المحاسبة، فما احتمال أن يكون الموظف إداريًا إذا علم أنه مؤهل؟

الحـل :

لتكن الحادثة A تمثل أن الموظف مؤهل أن يكون إداريا، والحادثة B تمثل أن الموظف ذو خبرة في المحاسبة، عندئذ تكون الحـادثـة AB تمثل أن الموظف مؤهل إداريًا وذو خبرة في المحاسبة.

نلاحظ أن

$$P(B) = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$P(AB) = 0.05$$

المطلوب هو إيجـاد $P(A \mid B)$.

من تعريف الاحتمال الشرطي نحصل على

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{1}{4}$$

٨,٢ قانون الضرب في الاحتمالات

من تعريف الاحتمال الشرطي وخواصه يمكننا استنباط التعريف التالي:

إذا كانت A , B حادثتين، فإن احتمال تقاطعهما (أو حاصل ضربهمـا) يـعـطـى بالعلاقة التالية :

$$P(AB) = P(BA) = P(A) \,.\, P(B \mid A) \;,\; P(A) \neq 0$$

$$= P(B) \,.\, P(A \mid B) \;,\; P(B) \neq 0$$

هذه العلاقة هي قانون الضرب (multiplicative law) ويمكن تعميمها لأي مجموعة

منتهية من الحوادث $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، وتسمى بالقانون العام للضرب

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \,.\, P(A_2 \mid A_1) \,.\, P(A_3 \mid A_2) \dots P\left(A_n \mid \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right)$$

مثال ٢,٨,١

يحتوي صندوق على 10 كرات : منها 5 أحمر ، و 3 أسود ،و 2 أبيض. سحبت 4 كرات دون إعادة الكرة بعد السحب. أوجد احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية حمراء والثالثة بيضاء والرابعة سوداء.

الحل :

يمكن ملاحظة أن عملية السحب تمت بدون إحلال أو بدون إرجاع أو بدون إعادة، ولنفرض أن :

الحدث B يمثل الكرة سوداء، ويكون $P(B) = \frac{3}{10}$ ،

الحدث R يمثل الكرة حمراء، ويكون $P(R) = \frac{5}{10}$ ،

الحدث W يمثل الكرة بيضاء، ويكون $P(W) = \frac{2}{10}$.

المطلوب في هذه الحالة إيجاد الاحتمال $P(BRWB)$.

باستخدام قانون الضرب العام نحصل على

$$\begin{aligned} P(BRWB) &= P(B) \,.\, P(R \mid B) \,.\, P(W \mid BR) \,.\, P(B \mid BRW) \\ &= \left(\frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{2}{8}\right) \cdot \left(\frac{2}{7}\right) = \frac{1}{84} \end{aligned}$$

مثال ٢,٨,٢

وجد في دراسة طبية عن مجتمع ما أن احتمال أن يكون شخص ما في ذلك

المجتمع مصابا بمرض القلب هو 0.35 ، واحتمال أن يكون الشخص المصاب بمرض القلب من المدخنين هـو 0.86. أوجد احتمال أن ذلك الشخص مدخن ومصاب بمرض القلب.

الحـل :

نفرض أن الحادثة H تمثل أن الشخص مصاب بمرض القلب، فيكون $P(H) = 0.35$ ، وكذلك نفرض أن الحادثة S مثل الشخص المدخن. وحيث إن احتمال الشخص المدخن S مصاب بمرض القلب هو 0.86 فإن:

$$P(S \mid H) = 0.86 .$$

أي أن احتمال أن الشخص مدخن ومصاب بمرض القلب، ويرمز له بالرمز بالرمز $P(H \cap S)$ ، يعطى باستخدام قانون الضرب كالتالي:

$$P(H \cap S) = P(H) \, . \, P(S \mid H)$$

$$= (0.35)\,(0.86) = 0.3$$

٩ , ٢ علاقة الاحتمال الكلي

لأي فراغ احتمالي معطى $(S, \Im, P)$ إذا كانت $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ مجموعة من الحوادث المتنافية المنتمية إلى العائلة $\Im$ بحيث إن :

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$$

$$B_i \, B_j = \Phi \, , \, i \neq j$$

$$P(B_i) > 0 \, , \, \forall \, i = 1 \, , \ldots , \, n$$

فإن لكل $A \subset B$ العلاقة التالية صحيحة، وتسمى بعلاقة الاحتمال الكلي:

$$P(A) = P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + \dots + P(A \mid B_n)\, P(B_n)$$

أو

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$$

لبرهان هذه العلاقة، نلاحظ أن $A \subset B$ ومنه نجد أن

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB) \\ &= P\big(A(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)\big) \\ &= P(AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} AB_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) \end{aligned}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \,.\, P(B_i)$$

مثال ١,٩,٢

وجد في مسح طبي ما أن نسبة 1% من سكان بلدة في أواسط أفريقيا يحملون

فيروس الأيدز (AIDS). أجري اختبار للدم بدقة 85% في حالة وجود المرض أو عدم وجوده؛ أي إذا كان الشخص حاملا للمرض فإن احتمال اختبار الدم موجـب بنسبة 85% ، وإذا كان الشخص غير حامل للمرض فإن احتمال الاختبار سالب أيضا بنسبة 85%.

إذا اختير شخص من تلك البلدة بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يكون اختبـار الدم موجبا؟

الحـل :

نفرض أن C هي حادثة أن الشخص المختار بطريقة عشوائية حامل للمرض، و E حادثة أن اختبار الدم موجب، و N حادثة أن اختبار الدم سالب.

نحصل من معطيات السؤال على :

$$P(C) = 0.01 \;,\; P(E \mid C) = 0.85 \;,\; P(N \mid \overline{C}) = 0.85$$

والمطلوب هو إيجاد الاحتمال الكلي : احتمال أن اختبار الدم موجب؛ أي P(E)

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \mid C) \,.\, P(C) + P(E \mid \overline{C}) \,.\, P(\overline{C}) \\ &= P(E \mid C) \,.\, P(C) + \left[1 - P(N \mid \overline{C})\right] . \, P(\overline{C}) \\ &= (0.85)(0.01) + (1-0.85)(1-0.01) \;=\; 0.157 \end{aligned}$$

مـثـال ٢,٩,٢

يلاحظ الطبيب في عملية التشخيص الطبي أن المريض يظهر عليه واحد أو أكثر من الأعراض المرضية: $A = \{S_1 \,,\, S_2 \,,\, \ldots \,,\, S_L\}$ ، وقد يواجه الطبيب صعوبة في تحديد أي من الأمراض التالية $\{D_1 \,,\, D_2 \,,\, \ldots \,,\, D_K\}$ كانت سببا في

ظهور تلك الأعراض المرضية A . إذا كان باستطاعة الطبيب معرفة احتمال ظهور الأعراض المرضية A على المريض في حالة إصابته المرض D_j، وإذا كان احتمال أن الشخص المصاب بالمرض D_j هو $P(D_j) = P_j \ , \ j = 1, 2, \dots, K$، وكان لدينا المعلومات التالية:

$$P(D_j) = \begin{cases} 0.40 \ , \ j=1 \\ 0.25 \ , \ j=2 \\ 0.35 \ , \ j=3 \end{cases} \quad , \quad P(A \mid D_j) = \begin{cases} 0.80 \ , \ j=1 \\ 0.60 \ , \ j=2 \\ 0.90 \ , \ j=3 \end{cases}$$

فما احتمال أن تظهر على المريض الأعراض المرضية A؟

الحل :

نلاحظ أن احتمال شخص مصاب بمرض D_j هو $P(D_j) = P_j \ , \ j = 1, 2, \dots, K$ ، وحيث إنه معلوم لدى الطبيب احتمال ظهور الأعراض المرضية A بدلالة إصابته بالمرض D_j ؛ أي $P(A \mid D_j)$ فيكون المطلوب هو احتمال ظهور الأعراض المرضية A ، أي الاحتمال الكلي للحادثة A أو

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid D_1) \, . \, P(D_1) + P(A \mid D_2) \, . \, P(D_2) + \dots + P(A \mid D_K) \, . \, P(D_K) \\ &= \sum_{j=1}^{K} P(A \mid D_j) \, . \, P(D_j) \end{aligned}$$

فعليه يكون :

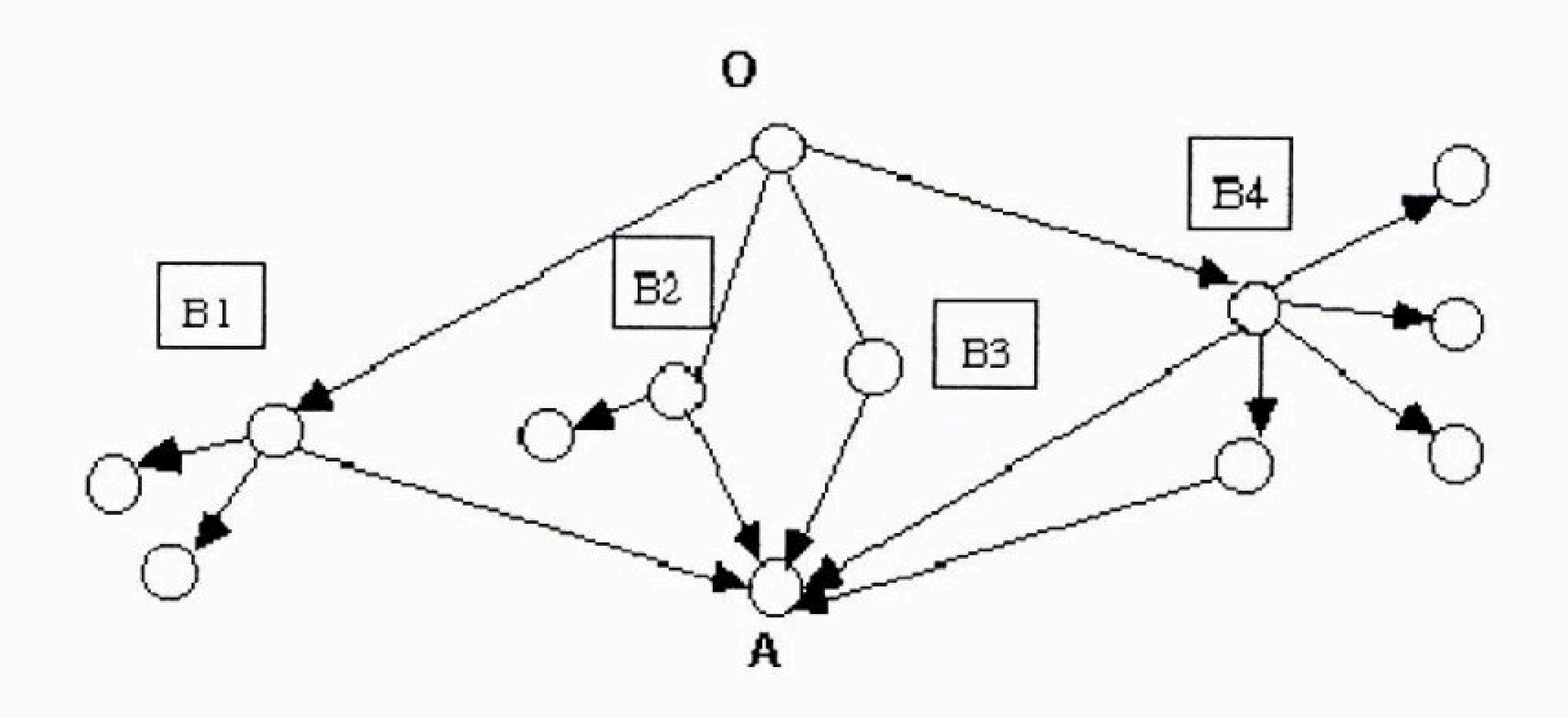
$$P(A) = P\left(A \mid D_1\right) . P(D_1) + P\left(A \mid D_2\right) . P(D_2) + P\left(A \mid D_3\right) . P(D_3)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} P\left(A \mid D_j\right) . P(D_j)$$

$$= (0.4)(0.8) + (0.25)(0.6) + (0.35)(0.9) = 0.785$$

مـثـال ٣ , ٩ , ٢

في الشكل رقم (١ , ٢)، ينطلق مسافر في مدينـة O مختارا واحدا من الطرق الأربعـة OB_1 , OB_2 , OB_3 , OB_4 بطريقة عشوائية. في مفـرق كـل طريق يتخذ طريقا بأسلوب عشوائي أيضا. أوجد احتمال أن يصل المسافر من المدينة O إلى المدينة المقصودة A.



الشكل رقم (١ , ٢).

الحـل:

ينطلـــق المسـافر من المدينـة O مختـارا طريقـا واحـدا من الطـرق الأربعـــة OB_4 ,OB_3 ,OB_2 ,OB_1 ، ويكون احتمال اختيار أي طريق هو $\frac{1}{4}$؛ أي أن

$$P(B_k) = \frac{1}{4} \quad , \quad k = 1, 2, 3, 4 \, .$$

عند وصول المسافر إلى النقطة B_1 (مثلا) سوف يتجه إلى المدينة A باتباع طريق واحد من ثلاث طرق؛ أي أن الاحتمال الشرطي للوصول إلى المدينة A مبتدئا من B_1 هو $\frac{1}{3}$ ويرمز له بالرمز $P(A \mid B_1) = \frac{1}{3}$.

بالمثل يمكننا الحصول على الاحتمالات الشرطية التالية (من الشكل) :

$$P(A \mid B_2) = \frac{1}{2} \; , \; P(A \mid B_3) = 1 \; , \; P(A \mid B_4) = \frac{2}{5}$$

المطلوب هو مقدار احتمال وصول المسافر إلى المدينة A ، أو أن المطلوب هو الاحتمال الكلي لوصول المسافر إلى المدينة A ؛ أي أن :

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)+P(A|B_4)P(B_4)$$

$$= \sum_{j=1}^{4} P(A \mid B_j) \, . \, P(B_j)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{67}{120}$$

١ , ٩ , ٢ ملاحظات على الاحتمال الكلي

(أ) تبقى علاقة الاحتمال الكلي صحيحة في حالة $n = \infty$.

(ب) لأي فراغ احتمالي $(S, \Im, P)$ بحيث $B \in \Im$ و $0 < P(B) < 1$ فإن لكل $A \in \Im$ نجد :

$$P(A) = P(A \mid B)\, P(B) + P(A \mid \overline{B})\, P(\overline{B})$$

وتسمى هذه بنتيجة أو حالة خاصة من علاقة الاحتمال الكلي.

١٠ , ٢ علاقة بيـيـز

لنفرض أن الـحـوادث $B_1, \ldots, B_n$ متنافـيـة؛ أي أنـه لأي $i \neq j$ فـإن: $B_i \cap B_j = \Phi$، وأن $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$؛ أي أنها شاملة.

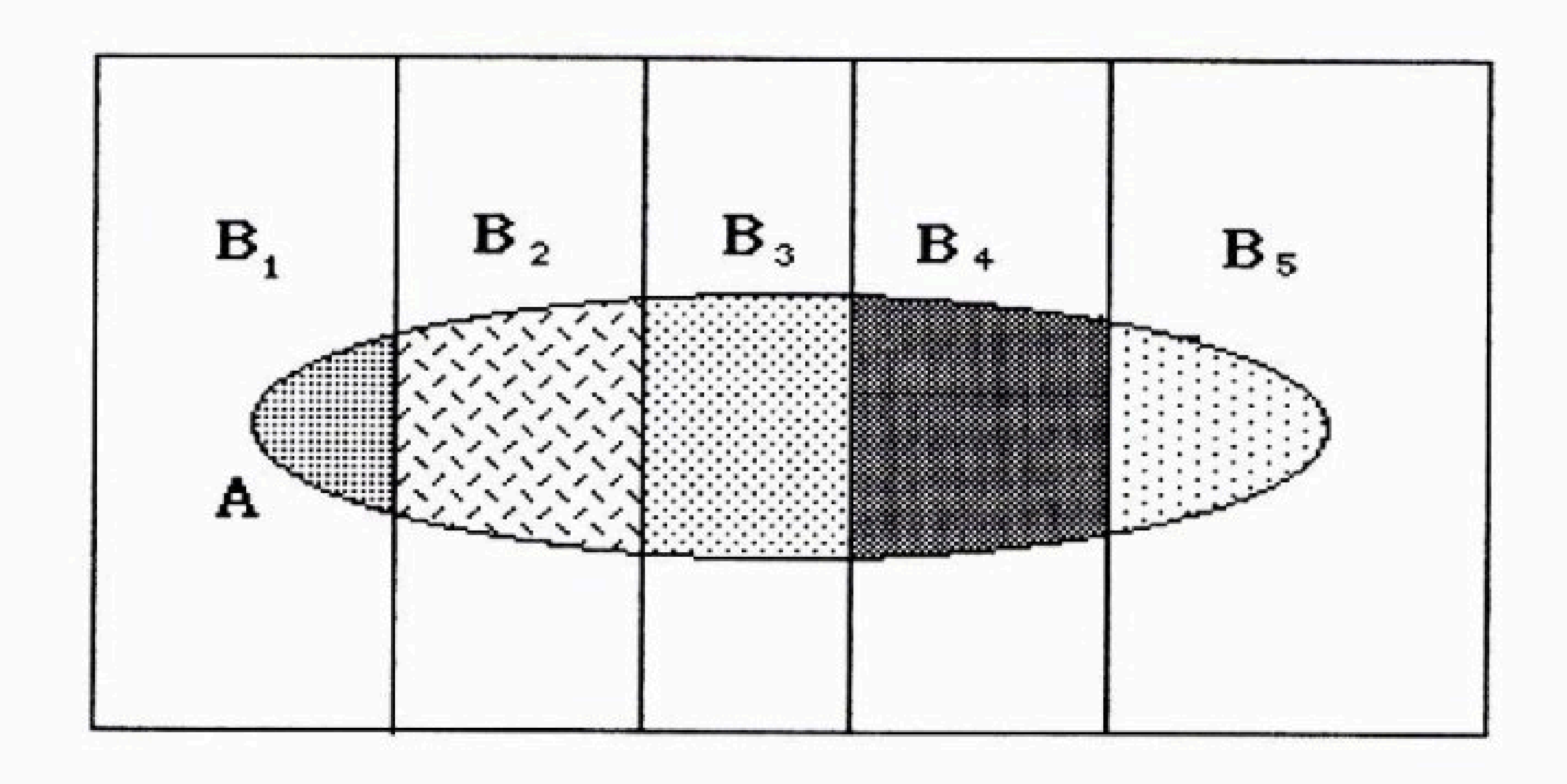
نلاحظ أن العلاقة التالية صحيحة لكل $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$P(AB_j) = P(A \mid B_j) \,.\, P(B_j) = P(B_j \mid A) \,.\, P(A)$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j) \,.\, P(B_j)}{P(A)}$$

ويوضح الشكل رقم (٢ , ٢) هذه الحالة عندما يكون $n = 5$.



الشكل رقم (٢ , ٢).

وبالتعويـض عن $P(A)$ من علاقـة الاحتمـال الكلي نحصل على علاقة بييز (Bayes' formula) التالية :

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n)}$$

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)}$$

١ , ١٠ , ٢ ملاحظات على علاقة بييز :

(أ) تبقى علاقة بييز صحيحة عند $n = \infty$.

(ب) في أي فراغ احتمالي $(S, \Im, P)$ حيث $A, B \in \Im$ و $P(A) > 0, P(B) \geq 0$ يكون:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A \mid B)\, P(B) + P(A \mid \overline{B})\, P(\overline{B})}$$

مـثـال ١ , ١٠ , ٢

إذا فرض أن شركة أرامكو السعودية تقوم بعمليات التنقيب عن البترول فـي موقع ما من المنطقة الجنوبية الغربية، وكانت فرصة الحصول على بترول تمثـل 0.05 ، وكانت R تمثل حالات الصخر؛ أي إنه إذا وجد بترول في ذلك الموقع فإن احتمال وجود الصخر هـو 0.8، وإذا لم يوجد بترول في ذلك الموقـع فـإن احتمال وجود الصخر هو 0.5، فما احتمال الحصول على بترول بمعلومية R ؟

الحـل :

نفرض أن الحادثة O تمثل وجود بترول ويكون :

$$P(O) = 0.05 \ , \ P(\overline{O}) = 1 - P(O) = 0.95$$

ولأن

$$P(R \mid O) = 0.8 \ , \ P(R \mid \overline{O}) = 0.5$$

فباستخدام علاقة بييز نجد أن :

$$P(O \mid R) = \frac{P(OR)}{P(R)} = \frac{P(O) \,.\, P(R \mid O)}{P(O) \,.\, P(R \mid O) + P(\overline{O}) \,.\, P(R \mid \overline{O})}$$

$$= \frac{(0.5)(0.8)}{(0.5)(0.8) + (0.95)(0.05)} = \frac{0.04}{0.515} = 0.0777$$

من الملاحظ أن وجود حالة من الصخر R في ذلك الموقع يزيد من فرصة الحصول على بترول، وبذلك يجب على الشركة القيام بدراسة جيولوجية لذلك الموقع قبل القيام بأية عملية تنقيب عن البترول.

مـثـال ٢ , ١٠ , ٢

عند الإجابة عن سؤال ذي خيارات متعددة، قد يعرف الطالب الإجابة أو قد يخمنها. بفرض أن P تمثل احتمال أن يعرف الطالب الإجابة، وكانت $(1 - P)$ هي احتمال أن يخمن الطالب الإجابة. نفرض كذلك أنه في حالة تخمين الطـالـب الإجابة، فإن احتمال صحتها هو $\frac{1}{m}$ حيث m عدد الخيارات. كيف يمكننا من هذه المعلومة حساب احتمال أن يعرف الطالب إجابة السؤال إذا علمت أن الطالب حصل على الإجابة الصحيحة؟

الحـل :

نفرض أن الحادثة C تمثل أن يجيب الطالب إجابة صحيحة، والحادثة K أن يعرف الطالب الإجابة الفعلية للسؤال، ويكون المطلوب إيجاد الاحتمال التالـي $P(K|C)$. باستخدام علاق بييز نحصل على:

$$P(K|C) = \frac{P(KC)}{P(C)} = \frac{P(C|K) \, . \, P(K)}{P(C|K) \, . \, P(K) + P(C|\overline{K}) \, . \, P(\overline{K})}$$

$$= \frac{p}{p + \left(\frac{1}{m}\right)(1 - p)}$$

$$= \frac{mp}{1 + (m-1)p}$$

وكحالة خاصة إذا كانت $m = 5$, $p = \frac{1}{2}$ فإن احتمال أن يعرف الطالب الإجابة الفعلية للسؤال بمعلومية أنه قد يجيب إجابة صحيحة هو $\frac{5}{6}$ ؛ أي أن:

$$P(K|C) = \frac{5}{6}$$

مـثـال ٣ , ١٠ , ٢

يوجد في عيادة نفسية إخصائيون اجتماعيون مشغولون بأعمالهم، لوحظ أن 60% من المرضى المتصلين بالعيادة تليفونيا قادرون على الفور على التحدث إلى الإخصائي الاجتماعي، ويطلب من 40% من المتصلين بالعيادة تليفونيا أن يتركوا أرقام هواتفهم حتى يمكن الاتصال بهم فيما بعد. علم أن الإخصائي الاجتماعي قادر على رد المكالمة في نفس اليـوم فيما يقارب 75% من الاتصالات، وقادر

على رد المكالمة في اليوم التالي فيما يـقـارب %25 من الاتصالات. إذا اتصـل مريض بالعيادة وتحدث على الفور إلى الإخصائي الاجتماعي فإن احتمال زيارتـه للعيادة والاستشارة هو 0.8 ، وإذا كان الإخصائي قادرا على رد المكالمة في نفس اليوم، فإن احتمال زيارة المريض للعيادة والاستشارة هو 0.6 وإذا كان الإخصائي قادرا على رد المكالمة في اليوم التالي، فإن احتمال زيارة المريض للعيادة والاستشارة هو 0.4. ما احتمال زيارة المرضى العيادة للاستشارة؟ بمعلومية الزائرين للعيـادة للاستشارة، ما احتمال المرضى المتحدثين على الفور إلى الإخصائي؟

الحـل :

لتكن الحادثة V تمثل زيارة المريض للعيادة والاستشارة.

والحادثة I تمثل التحدث على الفور إلى الأخصائي.

والحادثة S تمثل المكالمة في نفس اليوم.

والحادثة F تمثل رد المكالمة في اليوم التالي.

عندئذ باستخدام علاقة الاحتمال الكلي:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{المرضى الذين يزورون}\\ \text{العيادة للاستشارة}\end{array}\right) = P(V)$$

$$= P\left(V \mid I\right).\, P(I) + P\left(V \mid S\right).P(S) + P\left(V \mid F\right).\, P(F)$$

ولأن

$$P\left(V \mid I\right) = 0.8 \ , \ P(I) = 0.6 \ , \ P\left(V \mid S\right) = 0.6$$

فيكون

$$P(S) = (0.4)(0.75) \ , \ P\left(V \mid F\right) = 0.4 \ , \ P(F) = (0.4)(0.25)$$

$$P(V) = (0.8)(0.6) + (0.6)(0.4)(0.75) + (0.4)(0.4)(0.25) = 0.70$$

وبتطبيق علاقة بييز نجد أن :

$$P\left(\begin{array}{c|c}\text{المرضى المتحدثون} & \text{المرضى الزائرون} \\ \text{على الفور للأخصائي} & \text{للعيادة للاستشارة}\end{array}\right) = P\left(I \mid V\right) = \frac{P\left(V \mid I\right) . P(I)}{P(V)}$$

$$= \frac{(0.8)(0.6)}{(0.7)} = 0.686$$

مثـال ٢,١٠,٤

يطبع (ينسخ) ثلاثة أشخاص كتاب نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها. يطبـع الشخص A مقدار 40% من الكتاب، ويطبع الشخص B نسبة 30% منه، ويطبـع الشخص C نسبة الـ 30% الباقية. إذا كان احتمال أن يخطئ الشخـص A في الطباعة هو 0.02 واحتمال الخطأ عند B هو 0.03 واحتمال الخطأ عند C هو 0.4. إذا تمت مراجعة الكتاب ووجد أن صفحة فيها خطأ ما، فما احتمال أن يكون الذي طبعها الشخص B ؟

الحـل:

تمثل الحادثة E وجود خطأ طباعي في صفحة، ويكون المطلوب إيجـاد $P\left(B \mid E\right)$.

بتطبيق علاقة بييز :

$$P\left(B \mid E\right) = \frac{P\left(E \mid B\right) P(B)}{P\left(E \mid A\right) P(A) + P\left(E \mid B\right) P(B) + P\left(E \mid C\right) P(C)}$$

$$= \frac{(0.3)(0.03)}{(0.4)(0.02) + (0.3)(0.03) + (0.3)(0.4)} = \frac{9}{29} = 0.31$$

مـثـال ٥ , ١٠ , ٢

قام موظف التعداد بحصر نسب العائلات الذين يقيمون في بيت ملك، أو مستأجر، أو بيت مشترك مع غيرهم. كما قام بحصر من يملك منهم سيارة واحدة أو أكثر، وحصل نتيجة لعملية التعداد على المعلومات الموضحة في الجدول رقم (٢ , ٢). إذا اختيرت عائلة تملك أكثر من سيارة واحدة، فما احتمال أن تقيم العائلة في بيت ملك لها؟

نوع البيت / ملكية سيارة	بيت ملك O	بيت مستأجر R	بيت مشترك S
سيارة واحدة C_1	0.40	0.20	0.10
أكثر من سيارة C_2	0.20	0.02	0.08

الجدول رقم (٢ , ٢).

الحـل:

لنفرض أن الحادثة O تمثل أن العائلة تقيم في بيت ملك لها، وأن الحادثة R تمثل أن العائلة تقيم في بيت مستأجر، وأن الحادثة S تمثل أن العائلة تقيم فـي بيت مشترك، ولنفرض أن الحادثة C_1 تمثل أن لدى العائلة سيارة واحـدة، وأن الحادثة C_2 تمثل أن لدى العائلة أكثر من سيارة، يكون احتمال أن العائلة تقيم في بيت ملك إذا علمنا ملكيتها لأكثر من سيارة هو :

$$P(O \mid C_2) = \frac{P(OC_2)}{P(C_2)} = \frac{P(OC_2)}{P(OC_2) + P(RC_2) + P(SC_2)}$$

$$= \frac{0.2}{0.2 + 0.02 + 0.08} = \frac{2}{3}$$

٢,١١ نظريات على الاحتمال الشرطي

ندرس في هذا البند بعض خصائص الاحتمال الشرطي، ونورد في هـذا الخصوص سبع نظريات وبعض الأمثلة التوضيحية.

نظرية ٢,١١,١

لدينا فراغ احتمالي $(S, \mathfrak{I}, P)$ حيث $A \in \mathfrak{I}$ ، عندئذ:

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$$

البرهان:

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(AB)}{P(B)} = 1 - P(A \mid B)$$

مثال ٢,١١,١

يوجد في مصلحة حكومية 60% من الموظفين الذين تزيد أعمارهم على 30 سنة وحاصلين على مؤهلات جامعية، وأن 80% من هؤلاء يزيد دخلهم الشهـري على 15,000 ريال سعودي. إذا اختير موظف بطريقة عشوائية، فما احتـمـال أن يتقاضى دخلا يساوي 15,000 ريال سعودي أو أقل إذا علم أنه حاصل على مؤهل جامعي وعمره يزيد على 30 سنة؟

الحـل :

نفرض أن الحادثة A تمثل اختيار موظف يتقاضى دخلا يزيد على 15,000 ريال سعودي، والحادثـة B تمثل اختيار موظف حاصل على مؤهل جامـعـي وعمره يزيد على 30 سنة.

المطلوب هنا إيجاد الاحتمال $P(\overline{A} \mid B)$ ، وحيث إن

$$P(B) = 0.6 , P(A \mid B) = 0.8$$

فإن :

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$$
$$= 1 - 0.8 = 0.2$$

نظرية ٢ , ١١ , ٢

يعطى احتمال تقاطع حادثتين $A , B \in \Im$ بالعلاقة

$$P(AB) = P(A \mid B) . P(B) \quad , \quad P(B) > 0$$

أو بالعلاقة :

$$P(BA) = P(B \mid A) . P(A) \quad , \quad P(A) > 0$$

البرهان :

من تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

ومن ذلك نحصل على

$$P(AB) = P(A \mid B) . P(B)$$

بتبديل موقع كل من A , B نحصل على

$$P(BA) = P(B \mid A) . P(A)$$

مثال ٢ , ١١ , ٢

نريد، في المثال ٥ , ١٠ , ٢، معرفة نسبة الموظفين الحاصلين على مؤهلات جامعية ويتقاضون دخلا يزيد على 15,000 ريال سعودي .

الحـل:

المطلوب هنا إيجاد الاحتـمـال P(AB) ، وباستخدام النظريـة (٢ , ١١ , ٢) نحصل على

$$P(AB) = P(A \mid B) \,.\, P(B)$$

$$= (0.8)(0.6) = 0.48$$

أي أن هناك نسبة 48% من الموظفين حاصلون على مؤهلات جامعية ويتقاضون دخلا يزيد على 15,000 ريال سعودي.

نظرية ٣ , ١١ , ٢

إذا كان $P(A) > 0$ فإن :

(أ) $P(B \mid A) \geq 0 \ , \ B \in \Im$

(ب) $P(S \mid A) = 1$

(جـ) $P\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(A_j \mid A\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P\left(A_j \mid A\right)$

البرهان:

ينص تعريف الاحتمال الشرطي على :

$$P(B \mid A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$$

وحيث إن:

$$P(A) > 0 \ , \ P(AB) \ \ 0$$

إذن :

$$P(B \mid A) \geq 0$$

وهذا يبرهن الفقرة (أ)، ولبرهان الفقرة (ب) نكتب

$$P(S \mid A) = \frac{P(SA)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

وبرهان الفقرة (جـ) ينتج من ملاحظة أن

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty}(A_j \mid A)\right) = \frac{P\left(\sum_{j=1}^{\infty}(A_j A)\right)}{P(A)} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j A)}{P(A)} = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \mid A)$$

وهذا يعني أن

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty}(A_j \mid A)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \mid A)$$

نظرية ٤ , ١١ , ٢

إذا كانت $A_1 , A_2 \in \mathfrak{S}$ فإن:

$$P(A_1 \mid B) = P(A_1 A_2 \mid B) + P(A_1 \overline{A_2} \mid B)$$

نظرية ٥ , ١١ , ٢

لأي حادثتين $A_1 , A_2 \in \mathfrak{S}$ فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1 A_2 \mid B)$$

نظرية ٢,١١,٦

إذا كانت $A_1 , A_2 \in \mathfrak{S}$ وكانت $A_1 \subset A_2$ فإن

$$P(A_1 \mid B) \le P(A_2 \mid B)$$

نظرية ٢,١١,٧

لأي فراغ احتمالي $(S , \mathfrak{S} , P)$ معطى إذا كانت $A_1 , A_2 \in \mathfrak{S}$ فإن:

$$P(A_1 \mid B) \le P(A_2 \mid B)$$

يمكن استخدام بعض خواص دالة الاحتمال لإثبات النظريات السابقة، وقد تركنا الإثبات تمارين إضافية للقاريء.

٢,١٢ الحوادث المستقلة

تعريف ٢,١٢,١: يقال للحادثتين $A , B \in \mathfrak{S}$ في الفراغ الاحتمالي $(S , \mathfrak{S} , P)$ أنهما مستقلتان إذا تحققت العلاقة التالية:

$$p(A \cap B) = P(AB) = P(A) \,.\, P(B)$$

ومن تعريف الاحتمال الشرطي، نلاحظ أن هذه العلاقة تكافئ العلاقتين التاليتين:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$P(B \mid A) = P(B)$$

أي إذا كان احتمال إحدى الحادثتين لايتأثر بالحادثة الأخرى، فإن الحادثتين مستقلتان.

مثال ٢,١٢,١

في تجربة رمي زهرة النرد، كان الحدث O يمثل ظهور عدد فردي، وكان الحدث E يمثل ظهور عدد زوجي، والحدث F يمثل ظهور العدد 1 أو 2. ادرس استقلال كل من الحادثتين O , E وكذلك الحادثتين O , F.

الحـل:

لإثبات فيما إذا كانت الحادثتان O , E مستقلتين لابد أن تتحقق العلاقة:

$$P(\text{ظهور عدد فردي} \mid \text{ظهور عدد زوجي}) = P(O \mid E) = P(O)$$

نلاحظ أن: $P(O \mid E) = 0$ وكذلك $P(O) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

من الواضح أن

$$P(O \mid E) \neq P(O)$$

ومن ذلك نستنتج أن الحادثتين O , E غيرمستقلتين.

وبالمثل، لإثبات فيما إذا كانت الحادثتان O , F مستقلتين:

$$P(\text{ظهور عدد فردي} \mid \text{ظهور العدد 1 أو 2}) = P(O \mid F) = \frac{1}{2}$$

ولكن $P(O) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$، وأن

$$P(O \mid F) = P(O)$$

ومن ذلك نقول إن الحادثتين O , F مستقلتان.

مـثـال ٢ , ١٢ , ٢

يوجد في سوق مركزي ثلاثة أنواع من عصير البرتـقـال هـي: X , Y , Z. وضعت العصائر مرتبة حسب أفضلية مذاقها وعرفت بناء على ذلك الحوادث التالية: الحادثة A تمثل أن النوع X مفضل في المذاق على Y ، والحادثة B تمثل أن النوع X هو الأفضل مذاقا، والحادثـة C تمثل أن النـوع X يأتي في الدرجـة الثانية، والحادثة D تمثل أن النوع X يأتي في الدرجة الثالثة. إذا فرض أنه ليس لدينا القدرة على تحديد أفضلية النوع من مذاقه، ورتبت هذه الأنواع بطـريـقـة عشوائية، فهل الحادثة A مستقلة عن كل من الحوادث B , C , D ؟

الحـل :

عدد الترتيبات الممكنة هو (!3) أي أن عدد نقاط العينة في هذه التجربة هو :

$$E_1 : XYZ \ , \ E_3 : YXZ \ , \ E_5 : ZXY$$

$$E_2 : XZY \ , \ E_4 : YZX \ , \ E_6 : ZYX$$

(حيث إن XYZ ترمز إلى أن X هي الأفضل، وتأتي Y في المرتبة الثانية، ثم Z في المرتبة الثالثة)

لكل نقطة عينة E_i لها نفس الاحتمال؛ أي أن $P(E_i) = \frac{1}{6} \ , \ i = 1 , \ldots , 6$

نلاحظ أيضا أن :

A = { X مفضلة على Y } = $\{E_1 , E_2 , E_3\}$

B = { X هي الأفضل } = $\{E_1 , E_2\}$

C = { X في الدرجة الثانية } = $\{E_3 , E_5\}$

D = { X في الدرجة الثالثة } = $\{E_4 , E_6\}$

من ذلك نجد أن :

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ , \ P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \ , \ P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ويمكننا ملاحظة أن :

$$A \cap B = \{E_1 , E_2\} \ , \ A \cap C = \{E_5\} \ , \ A \cap D = \{ \ \} = \Phi$$

باحتمالات : $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \ , \ P(A \cap C) = \frac{1}{6} \ , \ P(A \cap D) = 0$

باستخدام تعريف الاستقلال لحادثتين نجد أن:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 \neq \left(P(B) = \frac{1}{2}\right)$$

ومن ذلك نستنتج أن الحادثتين A , B غير مستقلتين.

وبالمثل
$$P(A \mid C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = \left(P(A) = \frac{1}{2}\right)$$

أي أن الحادثتين C و A مستقلتان.

وأخيرا نجد أن

$$P(A \mid D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0 \neq \left(P(D) = \frac{1}{3}\right)$$

أي أن A , D غير مستقلتين.

الآن يمكننا القول أن الحادثة A مستقلة عن الحادثة C لكنها ليست مستقلة عن كل من B , D.

تعريف ٢ , ١٢ , ٢

يقال إن الحادثتين A , B غيرمستقلتين إذا كان :

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \neq P(A) . (P(B)$$

وهذا التعريف يكافئ :

$$P(A \mid B) \neq P(A)$$

$$P(B \mid A) \neq P(B)$$

أي أن وجود حدث يؤثر في احتمال حدوث الحدث الآخر.

مثال ٣,١٢,٣,٢

إذا كانت الحادثة A تمثل عائلة لديها أطفال بنين وبنات، والحادثة B تمثل أن تلك العائلة لديها على الأغلب ابن واحد. وإذا كان من المعلوم أن لدى العائلة 4 أطفال. ناقش استقلال الحادثتين A, B.

الحل :

سوف نرمز للابن بالرمز "b" وللابنة بالرمز "g"، وعليه نلاحظ أن فراغ العينة S في هذه الحالة يحتوي على $2^4 = 16$ نقطة عينة، وكل نقطة عينة لها نفس فرصة الحدوث وهي $\frac{1}{2}$.

لاحظ أنه يمكن كتابة فراغ العينة S بطريقة الحصر التالية :

$$S = \{bbbb,bbbg,bbgb,bgbb,gbbb,bbgg,bgbg,gbbg,$$
$$gbgb,bggb,ggbb,bggg,gbgg,ggbg,gggb,gggg\}$$

ويكون

$$A = \{bbbg,bbgb,bgbb,gbbb,bbgg,bgbg,gbbg,$$
$$gbgb,bggb,ggbb,bggg,gbgg,ggbg,gggb\}$$

$$B = \{bggg\ ,\ gbgg\ ,\ ggbg\ ,\ gggb\ ,\ gggg\}$$
$$A \cap B = \{bggg\ ,\ gbgg\ ,\ ggbg\ ,\ gggb\}$$

واحتمالات هذه الحوادث هي :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}\ ;\ P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{16}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

نلاحظ أن

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq \left(P(A) \,.\, P(B) = \frac{7}{8} \,.\, \frac{5}{16}\right)$$

إذن الحادثتان A, B ليستا مستقلتين؛ أي أنهما معتمدتان على بعضهما.

تعريف ٢,١٢,٣

نقول إن الحوادث $A, B, C \in \mathfrak{I}$ في الفراغ الاحتمالي $(S, \mathfrak{I}, P)$ مستقلة إذا تحققت المتساويات الأربع التالية:

$$P(AB) = P(A) \,.\, P(B)$$
$$P(AC) = P(A) \,.\, P(C)$$
$$P(BC) = P(B) \,.\, P(C)$$
$$P(ABC) = P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C)$$

يمكن ملاحظة أنه لكي تكون الحوادث A, B, C حوادث مستقلة، لايكفي أن يكون كل حادثتين منها مستقلتين. وبكلمات أخرى، تحقق الثلاث متساويات الأولى لايؤدي بالضرورة إلى تحقق المتساوية الرابعة وهذا يتضح من المثال التالي:

مثال ٢,١٢,٤

لدينا فراغ عينة $S = \{1,2,3,4\}$ والحوادث $A = \{1,2\}$ و$B = \{3,2\}$ و $C = \{4,2\}$ هي حوادث معرفة على فراغ العينة S.

نلاحظ أن

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \left(P(A) \,.\, P(B) = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\right)$$

$$P(AC) = \frac{1}{4} = \left(P(A)\ .\ P(C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\right)$$

$$P(BC) = \frac{1}{4} = \left(P(B)\ .\ P(C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\right)$$

أي أن $P(AB) = P(AC) = P(BC)$

نلاحظ أيضا أن

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \left(P(A).P(B).P(C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\right)$$

يؤكد المثال السابق أن تحقق المتساويات الثلاث الأولى من التعريف (٣, ١٢, ٢) ليس كافيا لتحقق المتساوية الرابعة.

كما يمكننا من التعريف (٣, ١٢, ٢) ملاحظة أنه إذا كانت الحوادث A, B, C مستقلة، فإن الحادثة A مستقلة عن أي حادثة أخرى مكونة من الحادثتين B, C؛ فمثلا الحادثة A مستقلة عن الحادثة $B \cup C$ حيث إن :

$$\begin{aligned}
P(A(B \cup C)) &= P(AB \cup AC) \\
&= P(AB) + P(AC) - P(ABC) \\
&= P(A).P(B) + P(A).P(C) - P(A).P(BC) \\
&= P(A).[P(B) + P(C) - P(BC)] \\
&= P(A)\ .\ P(B \cup C)
\end{aligned}$$

تعريف ٤, ١٢, ٢

يمكن تعميم مفهوم الحوادث المستقلة كالتالي: نقول إن الحوادث

$A_1 , A_2 , \dots , A_n$ مستقلة إذا، وإذا فقـط، كـان احـتـمـال الـقـاطـع لأي $k , \dots , 3 , 2$ من الحوادث مساويا حاصل ضرب احتمالاتها المقابلة.

وبعبارة أخرى :

في الفراغ الاحتمالي $(S , \Im , P)$ يقال إن الحوادث $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ المنتمية إلى $\Im$ مستقلة فإن:

$$P(A_i A_j) = P(A_i).P(A_j) \quad , \ i \neq j$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i).P(A_j).P(A_k) \ , \ i \neq j \ , \ j \neq k \ , \ i \neq k$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

مـثـال ٥ , ١٢ , ٢

أُجريت تجربة تتمثل في تكوين متتابعة غير منتهية من المحاولات المستقلة، وكان احتمال نجاح كل محاولة هو p ، واحتمال عدم نجاحها هو $(1 - p)$ فأوجد الاحتمالات التالية:

(أ) نجاح محاولة واحدة في الأقل من n أول محاولة.

(ب) نجاح k محاولة بالضبط من n أول محاولة.

(جـ) نجاح كل المحاولات.

الحـل :

(أ) لإيجاد احتمال نجاح محاولة واحدة على الأقل في n أول محاولة، فإنه من السهل التعامل مع مكملة هذه الحادثة التي تتمثل في n أول محاولة.

نفرض أن الحدث E_i يمثل عدم النجاح في i محاولة.

ويعطى احتمال عدم النجاح في n أول محاولة كما يلي :

$$P(E_1E_2 \dots E_n) = P(E_1).P(E_2) \dots P(E_n) = (1-p)^n$$

ويكون الاحتمال المطلوب في الفقرة (أ) هو $1-(1-p)^n$.

(ب) يكون لدينا متتابعة من n من النواتج تحتوي على k من حالات النجاح، و n-k من حالات عدم النجاح.

ولكل متتابعة الاحتمال $p^k.(1-p)^{n-k}$.

ولوجود $\binom{n}{k}$ متتابعة فإن الاحتمال المطلوب هو $\binom{n}{k} p^k.(1-p)^{n-k}$.

(جـ): نلاحظ في الفقرة (أ) أن احتمال نجاح كل المحاولات في أول n محاولة هو:

$$P(\overline{E_1} . \overline{E_2} \dots \overline{E_n}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}\right) = p^n$$

والمطلوب إيجاد الاحتمال $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{E_i}\right)$. تكتب :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{E_i}\right) = P\left(\lim_{n \to \infty} \bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}\right) = \lim_{n \to \infty} p^n = \begin{cases} 0 \ , & p < 1 \\ 1 \ , & p = 1 \end{cases}$$

مثال ٦ , ١٢ , ٢

يحتوي نظام تشغيل آلي على k نظاما فرعيا موصلة ببعضها. يعمل النظام إذا، وإذا فقط، كانت تعمل الأنظمة الفرعية. نفرض أن الأنظمة الفرعية تعمل بصورة مستقلة عن بعضها. إذا كانت الحادثة A تمثل أن النظام الكلي يعمل،

والحادثة A_i تمثل أن i نظاما فرعيا يعمل، فما احتمال أن يعمل النظام الكلي إذا كانت $k = 5$ و $P(A_i) = 0.95$ ؟

الحل :

نلاحظ أن النظام الكلي يحتوي على k نظاما فرعيًا، وأن النظام الكلي يعمل إذا، وإذا فقط، كان يعمل k نظاما فرعيًا.

نفرض أن الحادثة A تمثل أن النظام قد يعمل، وأن الحادثة A_i تمثل عمل i نظاما فرعيًا.

المطلوب هنا هو إيجاد احتمال الحدث A؛ أي P(A).

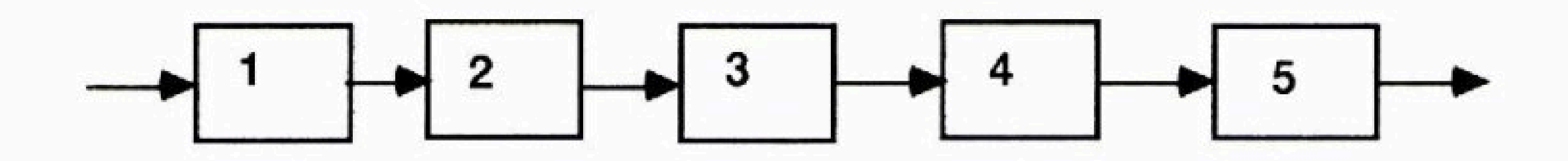
لكن نلاحظ أن:

$$P(A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_i)$$

وحيث إن A_i حوادث مستقلة، وكذلك لوجود قيم خمس حوادث فإن :

$$P(A) = (0.95)^5 = 0.7735$$

في هذا المثال، تكون تركيبة نظام التشغيل الآلي كالتالي :



الشكل رقم (٣, ٢). نظام متسلسل

مثال ٧, ١٢, ٢

من المثال أعلاه إذا كانت الفرضية تقول إن النظام الكلي يعمل إذا، وإذا

فقط، كانت على الأقل واحدة من الأنظمة الفرعية تعمل، فما احتمال أن يعمل النظام الكلي؟

الحـل :

نلاحظ أن المطلوب هو حساب احتمال كل الأنظمة الفرعية i؛ أي $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)$.

لاحظ أن:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{5} \overline{A_i}\right)$$

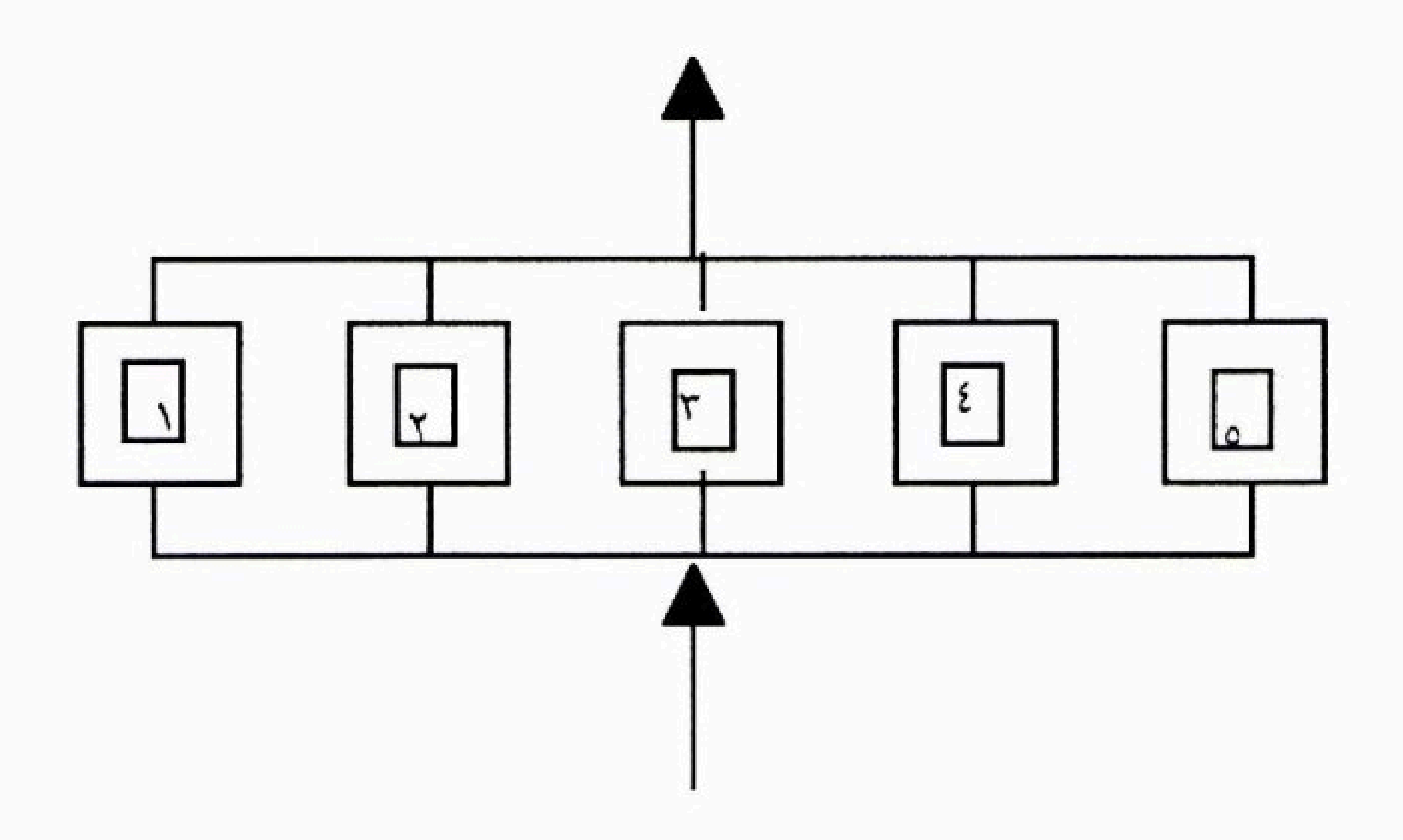
وحيث إن $P(A_i) = 0.95$ ، نجد أن $P(\overline{A_i}) = 0.95$ لكل i وأن:

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{5} \overline{A_i}\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{5} P(\overline{A_i})$$

$$= 1 - (0.1)^5$$

في هذا المثال تختلف تركيبة النظام التشغيلي وتأخذ الشكل التالي:



الشكل رقم (٤ , ٢). نظام متوازٍ.

مـثـال ٨ , ١٢ , ٢

وجد في عيادة طبية أن احتمال أن يستجيب طفل مريض بمرض الصـفـار الكبدي للعلاج هو 0.9.

إذا كان يوجد ثلاثة أطفال مرضى تم علاجهم بطريقة مستقلة. ما احتمال أن يستجيب طفل واحد في الأقل للعلاج؟

الحـل :

نفرض أن الحدث A يمثل طفلا واحدا على الأقل يستجيب للعلاج.

ونفرض أن B_1 يمثل عدم استجابة الطفل الأول للعلاج.

ونفرض أن B_2 يمثل عدم استجابة الطفل الثاني للعلاج.

ونفرض أن B_3 يمثل عدم استجابة الطفل الثالث للعلاج.

نلاحظ أن

$$\overline{A} = B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \bigcap_{i=1}^{3} B_i$$

$$\overline{A} = B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \bigcap_{i=1}^{3} B_i$$

وكذلك

$$S = A \cup \overline{A}$$

وحيث إن كلا من $A , \overline{A}$ هما حادثتان مكملتان ومتنافيتان، فعليه يكون:

$$P(S) = P(A) + P(\overline{A})$$

$$1 = P(A) + P\left(\bigcap_{i=1}^{3} B_i\right)$$

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{3} B_i\right)$$

باستخدام القانون العام للضرب يمكننا إيجاد مايلي :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{3} B_i\right) = P(B_1) \cdot P(B_1 \mid B_2) \cdot P(B_3 \mid B_1 B_2)$$

وحيث إن الحوادث B_1 , B_2 , B_3 مستقلة، فإنه يمكننا كتابة مايلي :

$$P(B_1 \mid B_2) = P(B_2) \ , \ P(B_3 \mid B_1 B_2) = P(B_3)$$

ونظرا لأن $P(B_i) = 1 - (0.9) = 0.1 \ , \ i = 1 , 2 , 3$ فعليه يكون :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{3} B_i\right) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = \prod_{i=1}^{3} P(B_i) = (0.1)^3$$

مثـال ٩ ,١٢ ,٢

وجد أن 0.4 من المراجعين في عيادة ما يشكون من ارتفاع في ضغط الدم، وأن 0.2 من المراجعين مصابون بمرض الكبد، وأن 0.1 يشكون من المرضين معا. هل ارتفاع ضغط الدم ومرض الكبد مستقلان؟

الحـل:

نفرض أن الحادثـة H تمثل ارتفاع ضغط الدم، والحادثـة L تمثل مـرض الكبد، والحدث LH يمثل الإصابة بالمرضين معا.

من تعريف الاستقلال :

$$P(L \mid H) = \frac{P(LH)}{P(H)} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4} \neq \left(P(L) = \frac{1}{5}\right)$$

وبالمثل

$$P(H \mid L) = \frac{P(HL)}{P(L)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2} \neq \left(P(H) = \frac{2}{5}\right)$$

من الواضح أن ارتفاع ضغط الدم يعتبر من الأعراض المسببة لمرض الكبد.

١٣ ,٢ بعض نظريات الاستقلال

نفرض في هذا البند مجموعة من النظريات التي توضح خصائص استقلال الحوادث مع براهينها لما لها من أهمية في دراسة الاحتمـال، ونـوضـح هـذه الخصائص بالأمثلة.

نظرية ١ ,١٣ ,٢

في الفراغ الاحتمالي $(S, \mathfrak{I}, P)$ يقال إن الحادثتين $A, B \in \mathfrak{I}$ مستقلتان إذا، وإذا فقط، كان

$$P(A \mid B) = P(A) \quad , \quad P(B \mid A) = P(B)$$

البرهان:

نفرض أولا أن الحادثتين A , B مستقلتان، فعليه يكون :

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)\,.\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

وبالمثل

$$P(B \mid A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(A)\,.\,P(B)}{P(A)} = P(B)$$

أي نفرض أن

$$P(A \mid B) = P(A) \;,\; P(B \mid A) = P(B)$$

إذن

$$P(A) = P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (١)$$

$$P(B) = P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (٢)$$

ومن العلاقتين (١) ، (٢) نحصل على

$$P(A)\,.\,P(B) = P(AB)$$

وهذا يحقق شرط الاستقلال للحادثتين A , B .

نظرية ٢ , ١٣ , ٢

إذا كانت الحادثتان A , B مستقلتين في فراغ العينة S فإن :

(أ) الحادثتين $A , \overline{B}$ مستقلتان.

(ب) الحادثتين $\overline{A} , B$ مستقلتان.

(جـ) الحادثتين $\overline{A} , \overline{B}$ مستقلتان.

البرهان:

(أ) الحادثتان $A \cap \overline{B}$, $A \cap B$ حادثتان متنافيتان، واتحادهمـا هـو الحادثة A؛ أي أن :

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

فعليه يكون

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

أو

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

ولأن A , B حادثتان مستقلتان :

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A) . P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A) . P(\overline{B}) \end{aligned}$$

وهذا هو شرط الاستقلال للحادثتين

(ب) وبالمثل فإن الحادثتين $\overline{A}$, B مستقلتان وتحققان الشرط

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) . P(B)$$

(جـ) باستخدام قانون دي مورجان $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

نجد أن

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$$
$$= 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) . P(B)$$
$$= (1 - P(A)) . (1 - P(B))$$
$$= P(\overline{A}) . P(\overline{B})$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) . P(\overline{B})$$

وهذا هو شرط استقلال الحادثتين $\overline{B}$, $\overline{A}$.

مثال ١ , ١٣ , ٢

سحبت ورقتان من 52 ورقة وهي كامل علبة ورق اللعب . أوجد احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان من نوع «إكـــة» (ace) في الحالتين التاليتين (بالنسبة للورقة الأولى) :

(أ) الإعادة؛ أي السحب والإحلال.

(ب) عدم الإعادة ؛أي السحب (بدون إحلال).

الحـل :

نفرض أن الحادثة A تمثل الحصول على «إكـة» في السحبة الأولـى، وأن الحادثة B تمثل الحصول على «إكة» في السحبة الثانية.

تكون الحادثتان A , B في حالة السحب مع الإرجاع مستقلتين ويكون :

$$P(\text{"ACES" كلا الورقتين}) = P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

في حالة السحب بدون إرجاع، فإن الحادثتين A , B غير مستقلتين (معتمدتان) ويكون:

$$P(\text{"ACES" كلا الورقتين}) = P(\text{الورقة الأولى إكة}) \times P\begin{pmatrix}\text{الورقة الثانية إكة بمعلومية} \\ \text{أن الورقة الأولى إكة}\end{pmatrix}$$

أي أن

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B \mid A)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

مثـال ٢ , ١٣ , ٢

إذا رُميت قطعتا نرد مرتين، فما احتمال أن يكون المجمـوع فـي إحـدى الرميتين 5 وفي الرمية الأخرى 11 ؟

الحـل :

لنفرض أن الحادثة A تمثل أن المجموع يساوي 5 والحادثة B تمثل أن المجموع يساوي 11 عند رمينا لقطعتي نرد.

إذن الحادثة A يمكن أن تظهر بطريقتين :

$$A_1 = \{ \text{ظهور المجموع 5 في الرمية الأولى} \}$$

$$A_2 = \{ \text{ظهور المجموع 5 في الرمية الثانية} \}$$

وكذلك الحادثة B يمكن ظهورها بطريقتين :

$B_1 = \{$ ظهور المجموع 11 في الرمية الأولى $\}$

$B_2 = \{$ ظهور المجموع 11 في الرمية الثانية $\}$

فعليه، يظهر الحدث المشترك $A \cap B$ بطريقتين متنافيتين هما: $A_2 \cap B_1$ أو $A_1 \cap B_2$ أي أن:

$$A \cap B = (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)$$

ويكون الاحتمال لهما

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1) \\ &= P(A_1).P(B_2) + P(A_2).P(B_1) \\ &= \frac{4}{36}.\frac{2}{36} + \frac{2}{36}.\frac{4}{36} \\ &= \frac{1}{162} + \frac{1}{162} = \frac{1}{81} \end{aligned}$$

مثال ٣, ١٣, ٢

افرض أن احتمال الانتهاء من عقد إنشاء مباني الجامعة في أبـها في غضون 15 سنة هو $\frac{3}{5}$، واحتمال انتهاء عقد استئجار المباني الخالية في غضون 15 سنة هو $\frac{2}{3}$. إذا كان العقدان مستقلين فأوجد الاحتمالات التالية :

(أ) انتهاء كلا العقدين في غضون 15 سنة.

(ب) انتهاء عقد البناء فقط في غضون سنة واحدة.

(جـ) انتهاء عقد الإيجار فقط في غضون 15سنة.

(د) انتهاء عقد واحد على الأقل.

(هـ) عدم انتهاء العقدين في غضون 15 سنة.

الحـل :

نفرض أن الحادثة A تمثل انتهاء عقد الإنشاء، والحادثة B تمثل انتهاء عقد الاستئجار؛ أي أن :

$$P(A) = \frac{3}{5} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{3}$$

(أ) نريد إيجاد احتمال انتهاء كلا العقدين؛ أي نريد إيجاد $P(A \cap B)$ وحيث إن A , B حادثتان مستقلتان فإن:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{5}.\frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

(ب) نريد إيجاد احتمال انتهاء عقد البناء فقط؛ أي نريد إيجاد $P(A \cap \overline{B})$، وحيث إن $A , \overline{B}$ مستقلتان (النظرية ٢ ,٩) وباستخدام $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ نجد أن

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A).P(\overline{B}) = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}$$

(جـ) المطلوب إيجاد احتمال انتهاء عقد الاستئجار فقط؛ أي نريد إيجاد $P(\overline{A} \cap B)$ أي أن :

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) . P(B) = \frac{2}{5} . \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

لأن $\overline{A}$, B مستقلتان وبمعلومية النظرية : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(د) المطلوب إيجاد احتمال انتهاء عقد واحد في الأقل؛ أي نريد إيجـاد احتمال الحادثتين A , B أي $P(A \cup B)$. وحيث إن A , B مستقلتان فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{13}{15}$$

(هـ) نريد إيجاد احتمال عدم انتهاء العقدين؛ أي نريد إيجاد $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

أو :

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \,.\, P(\overline{B})$$

$$= (1 - P(A)) \,.\, (1 - P(B))$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

مثـال ٤ ,١٣ ,٢

يصيب ثلاثة رمـاة A , B , C هدفا ما باحتمـالات $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ على الترتيب. إذا أطلقت الرمية مرة واحدة على الهدف، فأوجد احتمال أن:

(أ) يصيب رامٍ من الرماة الهدف على وجه الدقة.

(ب) يكون الرامي الذي أصاب الهدف هو الرامي الأول A.

الحـل :

نفرض أن الحادثـة A تمثل إصابة الرامي الأول للهدف، وأن الحادثـة B تمثل إصابة الرامي الثاني للهدف، وأن الحادثـة C تمثل إصابة الرامي الثالـث للهدف.

نعلم أن $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{3}$

وحيث إن الحوادث الثلاثة A , B , C مستقلة، فإنه يمكننا الحصول على

$$P(\overline{A}) = \frac{5}{6} \ , \ P(\overline{B}) = \frac{3}{4} \ , \ P(\overline{C}) = \frac{2}{3}$$

(أ) إذا كانت الحادثة E تمثل إصابة رامٍ للهدف على وجه الدقة. عندئذ

يمكن تعريف الحدث E على أنه اتحاد الحوادث التالية:

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \;,\; \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \;,\; \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$$

أي أن

$$E = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$$

إذن

$$\begin{aligned} P(E) &= P\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) + P\left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) \\ &= P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(B).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(C) \\ &= \frac{1}{6}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3} + \frac{5}{6}.\frac{1}{4}.\frac{2}{3} + \frac{5}{6}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{36} + \frac{5}{24} = \frac{31}{72} \end{aligned}$$

(ب) نريد إيجاد :

$P\left(A \mid E\right) = P$(الرامي A يصيب الهدف | رام يصيب الهدف على وجه الدقة)

وحيث إن $A \cap E = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

وكذلك من (أ)

$$P\left(A \cap E\right) = P\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = \frac{1}{12} \quad , \quad P(E) = \frac{31}{72}$$

فإنه يمكننا الحصول على

$$P\left(A \mid E\right) = \frac{P\left(A \cap E\right)}{P(E)} = \frac{1/12}{31/72} = \frac{6}{31}$$

نظرية ٣ , ١٣ , ٢ المحاولات المتكررة المستقلة

إذا كان احتمال حادثة ما A في محاولة واحدة هو p، فإن احتمال ظهورها

k من المرات فـي n من المحاولات المتكررة المستقلـة (indpendent repeated trials) هو :

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k \; q^{n-k}$$

حيث $q = 1 - p$ هو احتمال عدم ظهور الحدث A

البرهان

إذا كانت الحادثـة A تظهر k من المرات فـي n محاولة، فإن الحــدث المكمل $\overline{A}$ يظهر n-k في n محاولة؛ أي أن :

$$\underbrace{A\,A\,A \ldots A}_{\text{من المرات } k} \qquad \underbrace{\overline{A}\;\overline{A}\;\overline{A} \ldots \overline{A}}_{\text{من المرات } n-k}$$

عندئذ يكون احتمال هذه المتتابعة هو $p^k \cdot q^{n-k}$.

ولكن هذه متتابعة واحدة، وحيث إن الحادثة A تظهر k من المرات في n محاولة، ولاتـــظهر في n-k محاولة. فعليه يكون عدد المتتابعات الممكنة هو $\binom{n}{k}$ أي أن الاحتمال المطلوب هو :

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k \; q^{n-k}$$

وهذه حالة محدودة من حالة عامة تسمى قانون ذي الحدين الذي سوف نتناوله فيما بعد.

مـثـال ٥ , ١٣ , ٢

إذا رميت خمس قطع نقود معدنية متماثلة مرة واحدة، فما احتمال الحصول

على 3 صور بالضبط؟

الحـل:

من المعلوم أن احتمال الحصول عـلـى الـصـورة (H) هو $\frac{1}{2}$ ؛ أي أن

$P(H) = \frac{1}{2}$ ويكون الاحتمال المطلوب هو :

$$P\left(\text{ظهور 3 صور (H) في رمي 5 قطع معدنية مرة واحدة}\right) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

$$= 10\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{5}{16} \;;\; q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مـثـال ٦ , ١٣ , ٢

إذا كان %60 من طلاب النشاط الثقافي في كلية ما يفضلون أن يكون منسق النشاط أقرأهم لكتاب الله (Q)، فما احتمال أن يفضّل 7 طلاب في عينة مكونة من 12 طالبا يفضلون Q ؟

الحـل:

من المعلوم أن : $n = 12\ ,\ k = 7\ ,\ P = 0.60\ ,\ q = 0.40$

فعليه يكون :

$$P\left(\text{7 من 12 طالبًا يفضلون Q}\right) = \binom{12}{7}(0.6)^{7}\ (0.4)^{12-7}$$

$$= (792)(0.02799)(0.01024)$$

$$= 0.227$$

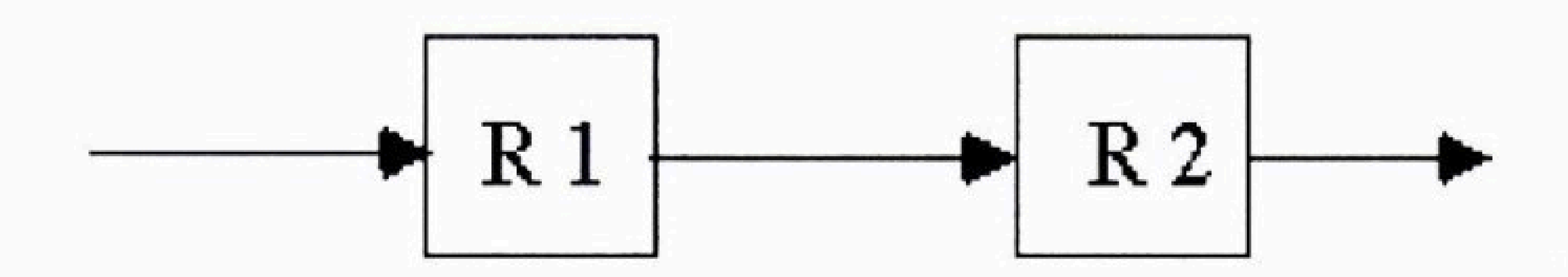
٢,١٤ تمـــاريـــن

١- أثبت أن :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$$

مستخدما حقيقة أن فراغ العينــة S الذي عدد عناصره n يحتوي على 2^n من المجموعات الجزيئية.

٢- للدينا النظام الكهربائي بالشكل رقم (٥ , ٢) يحتوي على المكونات R_2 , R_1 .



الشكل رقم(٥ , ٢).

يمكن أن تكون المكونات R_2 , R_1 بحالة سليمة (G) أو غير سليمة (F) ، إذا كان فراغ العينة S يحتوي على كل التوافيق الأربعة الممكنة من F , G ويعطى كالتالي:

$$S = \{(G,G)\ ,\ (G,F)\ ,\ (F,G)\ ,\ (F,F)\}$$

افرض أن الحادثة E_1 تمثل أن النظام الكهربائي المعطى يعمل بصورة طبيعية، وأن الحادثة E_2 تمثل في الأقل واحــداً من المكونات R_2 , R_1 غير سليــم.

(أ) هل يمكن أن نقول إن الحادثتين E_1 و E_2 متنافيتان؟ علل إجابتك.

(ب) عبر عن الحادثة $\overline{E_1}$ والحادثة $\overline{E_2}$.

(جـ) ماذا يمكن أن يُقال عن نوعية العلاقة بين الحادثة $\overline{E_1}$ والحادثة E_2 ؟

٣- إذا كانت $P(A \cup B) = 0.6$ و $P(A) = 0.5$ فأوجد $P(B)$ في الحالات التالية :

(أ) B, A حادثتان متنافيتان.

(ب) B, A حادثتان مستقلتان.

(جـ) $P(A | B) = 0.4$.

٤- إذا كانت B, A حادثتين متنافيتين، وكانت $P(A \cup B) = 0.7$ و $P(A) = 0.4$، وإذا كانت $P(B) = p$، فما قيم p التي تجعل الحادثتين B, A متنافيتان، وما قيم p التي تجعل الحادثتين B, A مستقلتين؟

٥- أُختير عدد صحيح بين 3 و 12 بطريقة عشوائية. أوجد احتمال أن يكون ذلك العدد :

(أ) عددا زوجيًا.

(ب) عددا زوجيًا ويقبل القسمة على 3.

٦- أُختيرت ثلاثة أعداد صحيحة موجبة من الأعداد الصحيحة الـ 20 الأولى بطريقة عشوائية. أوجد احتمال أن يكون :

(أ) حاصل جمع الأعداد زوجيًا.

(ب) حاصل ضرب الأعداد زوجيًا.

٧- إذا كانت B, A حادثتين متنافيتين معرفتين على فراغ العينة S، فأثبت أن

$$P\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

إذا كانت $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ و $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ، فأوجد:

(أ) $P(A)$

(ب) $P(B)$

(جـ) $P(A \cap \overline{B})$.

٨- يستطيع الطالب محمد إجابـة 75% من مسائل هذا الكتاب، بينما يستطيـع

زميله أحمد إجابة 70%. أوجد احتمال أن يستطيع محمد أو أحمد حل مسألـة مختارة عشوائيا.

٩- تحتوي ثلاجة علـى 12 بيضة، منها بيضتان فاسدتان. أختيـرت 4 بيضات بطريقة عشوائية لعمل كيك. ما احتمال :

(أ) وجود بيضة فاسدة واحدة على وجه التحديد؟

(ب) وجود بيضة واحدة فاسدة فـي الأقـل؟

١٠- يحتوي صندوق عـلـى 4 كرات حمراء، و 4 كرات بيضـاء،و 5 كرات خضراء سحبت منه ثلاث كرات بطريقة عشوائية. أوجد احتمال أن تكون :

(أ) جميع الكرات المسحوبة ذات ألوان مختلفة.

(ب) جميع الكرات المسحوبة ذات لون واحد.

١١- أُطلقت ثلاثة صواريخ على هدف ما، وكانت احتمالات إصابة الهدف لكل منها هي: 0.6 , 0.5 , 0.4 على التوالي. إذا أطلقت الصواريخ بطريقة مستقلة فما احتمال:

(أ) أن تصيب جميع الصواريخ الهدف؟

(ب) يصيب الهدف صاروخ واحد في الأقل؟

(جـ) يصيب الهدف صاروخ واحد فقط؟

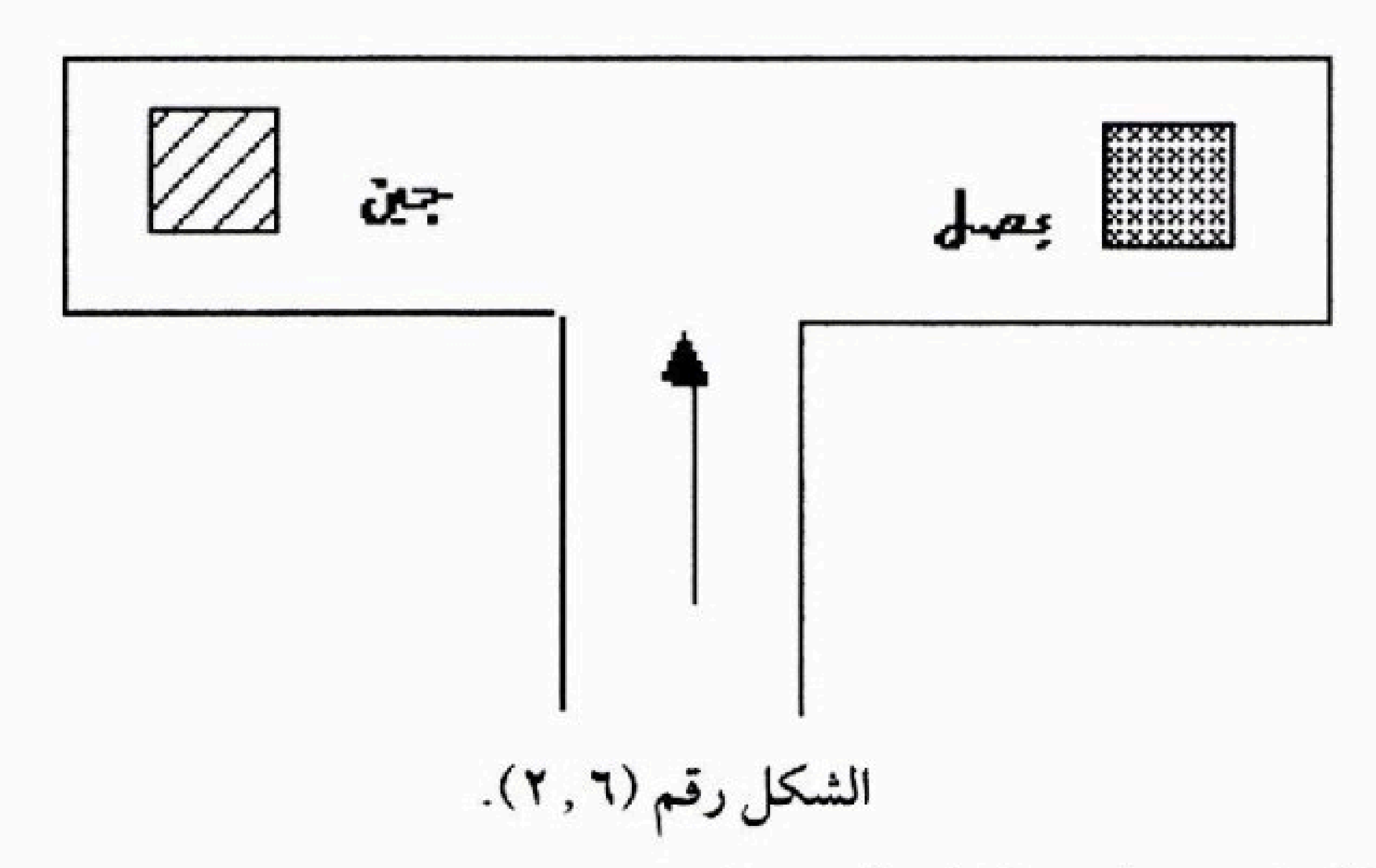
(د) يصيب الهدف صاروخان على وجه التحديد؟

١٢- بين الخطأ والصواب في كل ممايلي مع التعليل :

(أ) احتمال أن ينجح محمد في مقرر 241 إحصاء هو 0.7 واحتمال ألا ينجح في هذا المقرر هو 0.2.

(ب) A , B حادثتان بحيث إن $P(AB) = 0.8$, $P(B) = 0.5$, $P(A) = 0.4$.

١٣- وضع فأر في شبكة على شكل الحرف "T" كما هو موضح بالشكل رقم (٢,٦). إذا اتجه الفأر إلى اليسار سيجد في طريقه قطعة جبن، وإذا اتجه إلـى اليمين سيجد في طريقه قطعة بصل. تمت هذه المحاولة مرتين بواسطة نفس الفأر وبنفس الاتجاهات المبينة



الشكل رقم (٦ , ٢).

(أ) ما فراغ العينة لهذه التجربة؟

(ب) هل يمكن أن نعطي كل ناتج من نواتج هذه التجربة نفس الاحتمال؟ وضح ذلك من خلال المحاولة المعطاة لديك.

١٤- افرض أن $S = (-\infty , \infty)$ وأن $\Im$ عائلة المجموعات الجزئيـة مـن S. عرفنا الدالة $P(A)$ لكل حادثة A معرفة على $\Im$ بالعلاقة:

$$P(A) = \sum \binom{-n}{2}$$

حيث n عدد صحيح موجب وتنتمي إلى A، فهل P دالة احتمال؟

١٥- كان عدد الطلبة الوافدين إلى مكتب القبول والتسجيل في فترة زمنية طولها t ساعة معرفة على فضاء العينة $S = \{0, 1, 2, ...\}$، وكانت $\Im$ جبر بوريل المعرفة على S المكون من كل المجموعات الجزئيـة فـي S. إذا عرفنا على $\Im$ الدالـة التالية:

$$p_k = p\{k\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad , \quad k = 0 , 1 , 2 , ...$$

(أ) هل تحقق الدالة P شروط دالة الاحتمال على $\mathfrak{I}$ ؟

(ب) أوجد احتمال { طالب يصل في غضون 15 دقيقة } = A .

١٦- أُخضعت بطارية راديو جافة صنعتها شركة ما للفحص وسجلت مدة صلاحيتها، وكان فراغ العينة هو $S = \{ t : t \geq 0 \}$

لنفرض أن الحادثة A تمثل أن البطارية تعمل أكثر من 150 ساعة؛ أي أن $A = \{ t : t > 150 \}$، وكانت الحادثة B تمثل أن البطارية تنتهي صلاحيتها في 150 ساعة أو أقل؛ أي أن $B = \{ t : 0 \leq t \leq 150 \}$، والحادثة C تمثل أن المدة اللازمة لفحص البطارية هي على الأقل 25 ساعة وأقل من 200 ساعة؛ أي $C = \{ t : 25 \leq t \leq 200 \}$ فأوجد مايلي :

(أ) $A \cap C$, $B \cup C$, $\overline{B \cup C}$

(ب) إذا كانت دالة الاحتمال P معرفة كما يلي :

$$P(A) = \int_A \lambda^{-1} e^{\frac{-x}{\lambda}} dx$$

فأوجد احتمال أن البطارية تعمل على الأقل لمدة 200 ساعة، ثم أوجد احتمال أن البطارية لن تعمل أكثر من 200 ساعة.

١٧- تقدم ثلاثة من حافظي القرآن الكريم إلى مسابقة القرآن الكريم الدولية. إذا كان احتمال فوز الأول هو ضعف احتمال فوز الثاني، واحتمال فوز الثاني ضعف احتمال فوز الثالث، فأجب عما يلي :

(أ) هل فراغ العينة S المعرف في هذه التجربة هو فراغ ذو احتمالات متساوية، ولماذا؟

(ب) أوجد احتمال فوز الأول أو الثاني.

(جـ) أوجد احتمال استحالة فوز الأول أو الثاني.

١٨- لوحظ أنه في بلدة ما، يعاني 50% من السكان الذين تزيد أعمارهم على 40 سنة من السمنة. كما لوحظ أن نسبة السكان الذين يعانون من السمنة ومصابون بمرض القلب هي 0.25. اختير شخص عشوائيًا من أولئك الذين تزيد أعمارهم على 40 سنة ووجد أنه يعاني من السمنة. كيف يمكن لطبيب الاستفادة من هذه المعلومة لمعرفة نسبة الإصابة بمرض القلب؟

١٩- أوجد، في تجربة رمي زهرة النرد مرتين، ما يلي :

(أ) $P(r+c<4 \mid r=1)$

(ب) $P(r=1 \mid r+c<4)$

٢٠- من تعريف استقلال ثلاث حوادث، أعط مثالا يوضح أن تحقق المتساويات الثلاث الأولى ليس شرطا لتحقق المتساوية الرابعة.

٢١- نظام تشغيل آلي يحتوي على عدد k من الأنظمة الفرعية التشغيلية.

(أ) يعمل النظام بصورة طبيعية إذا، وإذا فقط، كان على الأقل واحد في الأنظمة الفرعية يعمل بصورة طبيعية. أوجد مدى مهارة هذا النظام الآلي إذا كانت $k=5$ و$P(A_i)=0.95$ لكل i.

(ب) إذا افترضنا أن النظام يعمل بصورة طبيعية إذا، وإذا فقط، كانت الأنظمة الفرعية تعمل بصورة طبيعية. سوف نفترض أيضا أن الأنظمة الفرعية تعمل بصورة مستقلة. إذا كان الحدث A يمثل أن النظام الآلي يعمل بصورة طبيعية، والحدث A_i يمثل أن i من الأنظمة الفرعية يعمل بصورة طبيعية. أوجد مدى مهارة النظام الآلي إذا كانت $k=5$ و $P(A_i)=0.95$ لكل i.

٢٢- لنفرض أن شركة أرامكو السعودية تقوم بعمليات التنقيب عن البترول في موقع ما من منطقة جيزان. إذا كنا نعلم أن احتمال وجود بترول عند القيام بعملية التنقيب هو 0.05، وكانت A تمثل مجموعة الصخر. عند وجود بترول في ذلك الموقع فإن احتمالية الصخر هي 0.8 وفي حالة عدم وجود بترول فإن احتمال الصخر هو 0.5.

(أ) إذا كانت حالة الصخر في الموقع هي A، فما فرصة اكتشاف بترول؟

(ب) ماذا تعني لك النتيجة في الفقرة (أ) بوصفك محللا إحصائيًا؟

(جـ) على ضوء النتائج المعطاة، بماذا تنصح أو تشير على شركة أرامكو؟

٢٣- يلاحظ الطبيب في عملية التشخيص الطبي أن المريض يظهر عليه واحد أو أكثر من الأعراض المرضية $A = \{S_1 , S_2 , \dots , S_L\}$ ، وعندها قد يواجه الطبيب مشكلة التعرف على أي من الأمراض $\{D_1 , D_2 , \dots , D_k\}$ المتسببة فعلا في ظهور تلك الأعراض المرضية A. من معلومات طبية يمكن الحصول على احتمال ظهور الأعراض المرضية A على مريض ما في حالة معرفة إصابته بمرض D_j إذا افترضنا أن احتمال شخص مصاب بمرض D_j هو $P(D_j) = p_j$ لكل $j = 1 , 2 , \dots , k$.

(أ) ما احتمال أن تظهر على المريض الأعراض المرضية A ؟

(ب) إذا توافرت لدينا المعلومات التالية :

$$P(A \mid D_j) = \begin{cases} 0.8 , & j=1 \\ 0.6 , & j=2 \\ 0.9 , & j=3 \end{cases} \quad , \quad P(D_j) = \begin{cases} 0.40 , & j=1 \\ 0.25 , & j=2 \\ 0.35 , & j=3 \end{cases}$$

فأوجد قيمة الاحتمال في الفقرة (أ) عدديا.

٢٤- يوجد في مركز المعلومات 100 جهاز حاسب آلي، منها 10 أجهزة معيبة. أخضعت هذه الأجهزة للفحص واحدا تلو الآخر للتأكد فيما إذا كانت معيبة، واختير جهازان بدون إحلال. إذا كانت الحادثة A_1 تمثل أن الجهاز الأول معيب، والحادثة A_2 تمثل أن الجهاز الثاني معيب، فأوجد مايلي :

(أ) الاحتمالات $P(A_1 \cap A_2)$, $P(A_2 \mid A_1)$, $P(A_1)$

(ب) $P(A_3 \mid A_1 \cap \overline{A_2})$, $P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$ إذا كانت الحادثة

A_3 تمثل أن الجهاز الثالث معيب.

(جـ) $P(A_1 \cap A_2)$ إذا اختير جهازان مع الإحلال، وماهو الـوصـف الإحصائي الغالب على الحادثتين A_1 , A_2 في الفقرتين (أ) ، (ب)؟

٢٥- عند عملية التشخيص الطبي للكشف عن سرطان الثدي عند النساء، علم أن احتمال أن تكون المرأة مصابة بمرض سرطان الثدي هـو 0.0001. إذا كانت عملية التشخيص تتطلب إجراء بعض التحاليل المخبرية، ونعلم أن نتيجة التحاليل تؤكد أن 90% من النساء يكن مصابات بالمرض، بينما تؤكد التحاليل نفسها أن 0.001 من النساء غير مصابات بالمرض.

(أ) إذا استعان الطبيب بنتيجة التحليل المخبري، فما فرصة (احتـمـال) إصابة المرأة بمرض سرطان الثدي؟

(ب) إذا كان احتمال إصابة المرأة بسرطان الثـدي هـو 0.001، فما قيمـة الاحتمال في (أ) ؟

(جـ) على ضوء النتيجة المتوقعة في (أ) ماذا يمكن للطبيب استنتاجه؟

(د) إذا كان احتمال إصابة المرأة بسرطـان الـثـدي هـو 0.01 فما قيمـة الاحتمال في (أ) ؟

(هـ) لخص النتائج التي حصلت عليها في جدول احتمالي. اشـرح مـاذا يمكنك أن تستنبط؟

٢٦- عند الإجابة عن سؤال ذي اختيارات متعددة، يكون الطالب على علم بالإجابة أو يخمنها. إفرض أن P تمثل احتمال علم الطالب بالإجابة، وكانت $1 - P$ هي احتمال تخمين الطالب للإجابة، وافرض أنه عند تخمين الإجابة فاحتمال صحة الإجابة هو $\frac{1}{m}$ حيث ترمز m لعدد الاختيارات. من هذه المعلومة، ما احتمال معرفة الطالب للإجابة عندما $P = \frac{1}{2}$, $m = 5$ ؟

٢٧- يوجد عند فحص طبيب لمريض دليل على أن لديه واحدا من الأمـراض

الثلاثة A_3 , A_2 , A_1 احتمالاتها هـي $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ على التوالي. لكي تتـم عملية التشخيص الطبي بدقة يجب أن تجرى للمريض بعض التحاليل الطـبـيـة المخبرية. يؤدي التحليل المخبري إلى نتيجة إيجابية باحـتـمـال 0.1 في حالة المرض A_1 ، واحتمـال 0.2 في حالة المـرض A_2، واحتمال 0.9 في حالـة المرض A_3 . أجريت هذه التحاليل 5 مرات وأعطت نتيجة إيجابية في أربعة منها ونتيجة سلبية في مرة واحدة فقط. ما احتمال الإصابة بكل مرض بـعـد إجـراء التحاليل؟

الفصل الثالث

المتغيرات العشوائية

● مقدمة ● دالة التوزيع لمتغير عشوائي ● المتغير العشوائي المنفصل ودالة توزيعه ● المتغير العشوائي المتصل ودالة كثافة الاحتمال ● التوزيعات المشتركة ● التوزيع الهامشي ● دوال الاحتمال الشرطية ● المتغيرات العشوائية المستقلة ● تمارين

٣,١ مقدمـــة

رأينا في الفصل السابق كيف يمكن التعرف على ناتج أو نواتج تجربة عشوائية ما، حيث يطلق على مجموعة كل النواتج، الممكنة والمتوقعة لتجربة ماسم فراغ العينة S. ونريد هنا معرفة كيف نصف هذه النواتج عدديًا؛ فمثلا عند رمي أي قطعتي نقود معدنية، ورغبنا في معرفة عدد مرات ظهور الصورة (H) والكتابة (T) وهذه في حد ذاتها نواتج أو كميات غير عددية (وصفية). للتعبير عن نواتج هذه التجربة العشوائية بأعداد، قد نعين لكل ناتج من نواتج التجربة في فراغ العينة $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ بواحد من الأعداد i ؛ حيث $i = 0, 1, 2$ وترمز أو تمثل عدد مرات ظهور الصورة (H). كذلك الحال في تجربة رمي زهرتي نرد، فقد يراد معرفة مجموع النقاط الظاهرة على الأوجه العلوية لكل من القطعتين، وهنا

نعين لكل ناتج من نواتج هذه التجربة في فراغ العينة S واحدا من الأعداد i حيث 12 , ... , 3 , 2 = i، التي ترمز لمجموع النقاط الظاهرة على الأوجه العلوية لقطعتي النرد. من الواضح جليا أن الأعداد 2 , 1 , 0 والأعداد 12 , ... , 3 , 2 تحَدّد، في المثالين السابقين، بواسطة نواتج التجربتين المذكورتين. ويطلق على هذه الكميات العددية التي تحدد قيمتها من خلال ناتج تجربة عشوائية اسم «متغير عشوائي» (random variable)، ورياضيا قد نعين عددًا حقيقيّا وحيدًا لكل ناتج في فراغ العينة. الآن يمكن تعريف المتغير العشوائي على أنه دالة ذات قيمة حقيقية معرفة على فراغ العينة S، ونظرا لأهمية المتغير العشوائي المعرّف على نوع العينة S، فإننا قد نعين احتمالات لكل قيم المتغير العشوائي الممكنة.

مثال ٣,١,١

إذا كانت التجربة هي رمي قطعة نقود معدنية، كما ذكرنا سابقا، وكان فراغ العينة S المصاحب لهذه التجربة هو :

S = { x : x ظهور صورة أو x ظهور كتابة } = { x : x = H أو x = T }

حيث ترمز H , T لظهور الصورة والكتابة، وإذا كانت X دالة معرفة على فراغ العينة S كالتالي:

$$X = \begin{cases} X(x) = 1, & x = H \\ X(x) = 0, & x = T \end{cases}$$

فمن هنا نقول إن X دالة ذات قيمة حقيقية معرفة على فراغ العينة S؛ أي أن:

$$X : S \longrightarrow A = \{ x : x = 0, 1 \}$$

وهذا بدوره يعني أن X دالة أو راسم تأخذ كل نواتج فراغ العينة S إلى فراغ من الأعداد الحقيقية A، ويمكن تسمية الدالة X بمتغير عشوائي، والفراغ $A = \{ x : x = 0, 1 \}$ بالفراغ الملازم للمتغير العشوائي، أو باختصار فراغ المتغير العشوائي X.

من المثال السابق يمكننا إعطاء التعريف التالي :

تعريـف ١ , ١ , ٣ المتغير العشوائي

إذا كان فراغ العينة لتجربة عشوائية هو S، فإن الدالة X التي تعين لكل عنصر $x \in S$ عددًا حقيقـيًا وحيدًا $X(x) = y$ تسمى متغيـرًا عشوائيًا، وفراغ المتغيـر العشوائي X هو مجموعة من الأعداد الحقيقية، يرمز لها بـالـرمـز A، ويعرف كالتالي :

$$A = \{ y : y = X(x), x \in S \}$$

ملاحظات ١ , ١ , ٣

(أ) إذا كان فراغ العـيـنـة S يحتوي أعـدادا حـقـيـقـيـة، عندئذ يكون من المناسب فرض $X(x) = x$ ؛أي أن $S = A$.

(ب) يرمز عادة للمتغيرات العشوائية بحروف لاتينية كبيرة مثل $X, Y, Z, ...$، ويرمز لقيم المتغيرات العشوائية بحروف لاتينية صغيرة مثل $x, y, z, ...$.

(جـ) يمكن تعريف أكثر من متغير عشوائي على فراغ العينة S.

(د) يوجد نوعان من المتغيرات العشـوائية معرفة على فراغ العينة S هما المتغيـران العشـوائيـان المنفصل (أو المتقطع)، والمتغير العشوائي المتصل (أو المستمر). وسندرس فيما بعد المتغير العشوائي المتقطع والمتصل.

مـثـال ١ , ٢ , ٣

في تجربة رمي قطعتي نقود كانت Y تمثل عدد مرات ظهور الصـورة (H)، وتُحدّد قيم Y من خلال فراغ العينة S كما يلي : ترمز T, H لظهور الصورة (H) والكتابة (T) على التوالي، وكان كل ناتج من نواتج هذه التجربة على صورة زوج مرتب من الصورة والكتابة (H , T) تعني ظهور الصورة في القطعة الأولـى والكتابة في القطعة الثانية.

إذن في هذه التجربة (رمي قطعتي نقود) يوجد $2^n = 2^2 = 4$ نقاط عينة في فراغ العينة.

$$S = \{ HH, HT, TH, TT \}$$

يمكننا الآن - وبكل سهولة- تعيين قيمٍ للمتغيـر Y من نقاط العينة في S حيث تمثل Y عدد مرات ظهور الصورة (H)؛ فمثلا :

نقطة العينة HH تعني ظهور الصورة في كلا القطعتين؛ أي أن $Y = 2$.

ونقطة العينة HT تعني ظهور الصورة في القطعة الأولى والكتابة في القطعة الثانية؛ أي أن $Y=1$.

ونقطة العينة THتعني ظهور الكتابة في القطعة الأولى والصورة في القطعة الثانية؛ أي أن $Y= 1$.

ونقطة العينة TT تعني ظهور الكتابة في كلا القطعتين؛ أي أن $Y = 0$.

يمكن القول إن المتغير العشوائي Y يأخذ القيم الثلاثة 2 , 1 , 0 التي هي حوادث تعرف من نقط العينة. وطبقا لتعريف المتغير العشوائي يمكننا اختصار ذلك كما يلي: في فراغ العينة S لتجربة رمي قطعتين معدنيتين والمعرف $S = \{HH , HT , TH , TT\}$، إذا كانت Y معرفة على S فإنه طبقا لتعريف المتغير العشوائي يمكننا كتابة

$$Y(TT) = 0, Y(HT) = Y(TH) = 1, Y(HH) = 2$$

نسمي Y متغيرًا عشوائيًا، وهو يمثل عدد مرات ظهور الصورة (H) في هذه التجربة، ويسمى الفراغ $A = \{ y : y = 0, 1, 2 \}$ بفراغ المتغير العشوائي Y .

مما تقدم ذكره، يمكن إيجاد الاحتمالات المقابلة لكل قيم المتغير العشوائي الممكنة، وذلك باستخدام تعريف الاحتمال.

نلاحظ، في المثال السابق، أن فراغ العينة S ذو احتمالات متساوية؛ أي أن لكل نقطة عينة نفس فرصة الاحتمال. وبالتحديد نلاحظ أن:

$$S = \{ E_1 , E_2 , E_3 , E_4 \}$$

وأن:

$$P(E_i) = \frac{1}{4} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$$

يأخذ المتغير العشوائي Y القيم الممكنة التالية 2 , 1 , 0 وتكون احتمالاتها المقابلة هي:

$$P(Y = 0) = P(\text{عدم ظهور الصورة}) = P(\{TT\})$$

$$= \frac{n\{TT\}}{n(S)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 1) = P(\text{ظهور الصورة مرة واحدة}) = P(\{HT, TH\})$$

$$= \frac{n\{HT, TH\}}{n(S)}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 2) = P(\text{ظهور الصورة مرتين}) = P(\{HH\})$$

$$= \frac{n\{HH\}}{n(S)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

يطلق على الاحتمالات المقابلة لقيم المتغير العشوائي Y اسم التوزيع الاحتمالي أو (probability distribution) للمتغير العشوائي، ويمكننا وضع هذه النتائج أو

المعلومات في جدول يسمى الجدول الاحتمالي (probability table).

y	0	1	2
P(Y = y)	1/4	1/2	1/4

كما يمكن كتابة ما يلي :

$$1 = P\left(\bigcup_{i=0}^{2}\{Y = i\}\right) = \sum_{i=0}^{2} P(Y = y)$$

مما سبق يمكننا استنباط التعريفين التاليين :

تعريف ٢ , ١ , ٣ (دالة احتمال متغير عشوائي)

إذا كان Y متغيرًا عشوائيًا فإن الدالة المعطاة بالصيغة الرياضية $f(y) = P(Y = y)$ لكل y في مدى Y تسمى دالة الاحتمال (probability function) أو دالة الثقل الاحتمالية (probability mass function) للمتغير العشوائي Y .

تعريف ٣ , ١ , ٣

إذا كانت y قيمة المتغير العشوائي المنفصل (أو المتقطع) Y فإن احتمال أن $Y = y$ يساوي مجموع احتمالات نقاط العينة التي تعين القيمة y.

مثال ٣ , ١ , ٣

في تجربة رمي زهرتي نرد، كان X يمثل مجموع النقاط الظاهرة على الوجهين العلويين لقطعتي النرد؛ أي أن X دالة تعين عددا حقيقيا لكل ناتج من نواتج التجربة. ويمكن كتابة فراغ العينة S في هذه التجربة على صورة زوج مرتب (i , j) حيث $i = j = 1, 2, 3, ..., 6$ ؛ أي أن :

$$S = \{\ (1,1),..,(1,6),(2,1),..,(2,6),(3,1),..,(3,6),..,(6,1),..,(6,6)\ \}$$

وباستخدام الصيغة المصفوفية يمكن كتابة

$$S = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & . \; . \; . \; . & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & . \; . \; . \; . & (2,6) \\ . & . & . \; . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . \; . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . \; . \; . \; . \; . & . \\ (6,1) & (6,2) & . \; . \; . \; . & (6,6) \end{pmatrix}$$

يمكن الآن تعيين قيم المتغير X من نقاط العينة مع اعتبار أن X يمثل مجموع النقاط الظاهرة على الوجهين العلويين للقطعتين؛ أي أن

$$X(i\,,j) = i + j \quad , \quad i\,,j = 1, 2, ..., 6$$

على سبيل المثال :

$$X(1\,,1) = 1 + 1 = 2 \quad , \quad X(1\,,2) = 1 + 2 = 3 \quad , \quad ...$$

$$X(1\,,6) = 7 \quad , \quad X(2\,,6) = 8 \quad , \quad X(3\,,6) = 9$$

$$X(4,6) = 10, \; X(5\,,6) = 11\,, X(6\,,6) = 12$$

واضح أن المتغير العشوائي X يأخذ القيم $12\,, ...\,, 4\,, 3\,, 2$.

يمكننا، بعد ذلك، إيجاد الاحتمالات المقابلة لكل قيم المتغير العشوائي X كما يلي:

$$f(2) = P(X = 2) = P\{(1\,,\,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$f(3) = P(X = 3) = P\{(1\,,\,2)\,,\,(2\,,\,1)\} = \frac{2}{36}$$

$$f(4) = P(X = 4) = P\{(1\,,\,3)\,,\,(2\,,\,2)\,,\,(3\,,\,1)\} = \frac{3}{36}$$

وبالمثل نجد أن :

$$f(5) = P(X = 5) = \frac{4}{36} \quad , \quad f(6) = P(X = 6) = \frac{5}{36}$$

$$f(7) = P(X = 7) = \frac{6}{36} \quad , \quad f(8) = P(X = 8) = \frac{5}{36}$$

$$f(9) = P(X = 9) = \frac{4}{36} \quad , \quad f(10) = P(X = 10) = \frac{3}{36}$$

$$f(11) = P(X = 11) = \frac{2}{36} \quad , \quad f(12) = P(X = 12) = \frac{1}{36}$$

يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بالجدول الاحتمالي التالي :

x	2	3	4	5	6	7
f(x) = P(X = x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36
x	8	9	10	11	12	
f(x) = P(X = x)	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	

مـثـال ٤ , ١ , ٣

يوجد في مركز المعلومات 15 جهاز حاسب آلي معروضة للتشغيل. يوجد 5 من هذه الأجهزة عاطلة (معيبة) بدون علم إدارة المركز. قام المشرف على المركـز بفحص 3 أجهزة بطريقة عشوائية. ما التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X إذا كان X يمثل عدد الأجهزة المعيبة أو التي بها عطل؟

الحـل :

نلاحظ أن التجربة هي فحص 3 أجهزة بطريقة عشوائية، وبذلك يمكن إيجاد عدد نقاط العينة في هذه التجربة العملية، ونلاحظ أن عدد الطرق الممكنة التي يتم بها فحص 3 أجهزة من 15 جهازا هي :

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\,.\,12!} = \frac{15\,.\,14\,.\,13\,.\,12}{3!\,.\,12!} = 455$$

يمثل المتغير X عدد الأجهزة التي بها عطل أو معيبة، والقيم الممكنة هي 0, 1, 2, 3 والاحتمالات المقابلة لهذه القيم هي :

$$P(X=0) = P(\text{لايوجد جهاز معيب}) = \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{3}}{455} = \frac{\frac{10!}{3!\,.\,7!}}{455} = \frac{120}{455}$$

$$P(X=1) = P(\text{يوجد جهاز معيب}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{455} = \frac{225}{455}$$

$$P(X=2) = P(\text{يوجد جهازان معيبان}) = \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{1}}{455} = \frac{100}{455}$$

$$P(X=3) = P(\text{الأجهزة المفحوصة معيبة}) = \frac{\binom{5}{3}\binom{10}{0}}{455} = \frac{10}{455}$$

الآن يمكن كتابة التوزيع الاحتمالي f(x) للمتغير العشوائي X ويكون :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{120}{455}, & x=0 \\ \frac{225}{455}, & x=1 \\ \frac{100}{455}, & x=2 \\ \frac{10}{455}, & x=3 \end{cases}$$

ويمكن تمثيل هذه المعلومات في جدول احتمالي كما يلي :

x	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	120/455	225/455	100/455	10/455

يمكن كتابة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X رياضيا بالعلاقة التالية :

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{10}{3-x}}{455} \quad , \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

٢ , ٣ دالة التوزيع لمتغير عشوائي

دالــة التوزيــع لمتغير عشوائي X، يرمز لها بالرمــز F(x)، وتعرف لكل الأعــداد الحــقيقية x حيث $- < x <$ بالصيغة الرياضية التالية:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

تحدد الدالة F(x) احتمال الحادثة للمتغير العشوائي X الذي يأخذ قيما أقل مــن أو يساوي قيمة معينــة x. تسمى دالة التوزيع أيضا دالة توزيع تراكمية (cumulative distribution function) لأنها تقدم الاحتمال التراكمي للمتغير العــشــوائــي X من أصغر قيمة وحتى قيمة معينة x.

١ , ٢ , ٣ خواص دالة التوزيع

من تعريف دالة التوزيع F(x) نلاحظ أنها احتمال حادثة معينة. من الواضح أن

$$F(x = -\infty) = P(\Phi) = 0$$

$$F(x = +\infty) = P(S) = 1$$

إذا كان a , b عددين حقيقيّين و $a < b$ فإن احتمال الفترة [a , b] يعطى كما يلي:

$$F(b) - F(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = P(a < X \leq b)$$

وحيث إن ذلك الاحتمال موجب، فإن الدالة F(x) دالة تزايدية في x. قد نلاحظ أيضا أن الدالة F(x) تحقق الشرط :

إذا كانت $h > 0$ فإن

$$\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$$

وهذا يحدد أن F(x) دالة متصلة من اليمين عند كل قيمة من قيم x.

يمكن مما سبق أن نلخص بعض خواص دالة التوزيع F(x) في النقاط التالية :

(أ) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

(ب) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

(جـ) F(x) دالة تزايدية في x' أي أن $F(x_1) \le F(x_2)$ لكل $x_1 \le x_2$.

(د) F(x) دالة متصلة على الأقل من اليمين عند كل قيمة x من X، أي أنه لأي قيمة x ومتتابعة تناقصية x_n و $n \ge 1$ وأن $\lim x_n = x$ فإن :

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x)$$

وسوف نحاول فيما يلي إثبات الخواص السابقة.

الخاصيـــة (جـ): متحققة لأنه لكل $x_1 \le x_2$ فإن الحادثة $\{X \le x_1\}$ محتواة في الحادثة $\{X \le x_2\}$؛ أي أن $\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$ وبذلك يكون :

$$P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\}$$

أي أن $F(x_1) \le F(x_2)$ ومنه ينتج أن F(x) متزايدة.

لإثبات الخواص (أ)، (ب)، (جـ) نـستخدم خـاصيـة الاتـصـال أو الاســتمراريـــة (continuity property) التي تنص على :

إذا كانت $A_1, A_2, \dots$ متتابعة متزايدة من الحوادث $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ فإن:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

إذا كانت ... , A_1 , A_2 متتابعة متناقصة من الحوادث ... $\subset A_{n-1} \subset A_n$ فإن:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

الخاصية (أ): لكل ... , 2 , 1 = n إذا كانت A_n تمثل الحادثة $\{X \le n\}$ فإن المتتابعة ... , A_1 , A_2 متزايدة واتحادها هو الحادثة $\{X \le \infty\}$، ومن خاصية الاتصال نحصل على:

$$\lim_{n \to \infty} F(n) = \lim_{n \to \infty} P\{X \le n\} = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(X < \infty) = 1$$

الخاصية (ب): لكل ... , 2 , 1 = n إذا كانت A_n تمثل الحادثة $\{X \le -n\}$ فإن المتتابعة ...,A_1, A_2 متناقصة وتقاطعها هو المجموعة الخالية $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Phi$ ، فيكون:

$$\lim_{n \to \infty} F(-n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\Phi) = 0$$

الخاصية(د): لنفرض أن A_n تمثل الحادثة $\left\{X \le a + \frac{1}{n}\right\}$ لكل $n \ge 1$

فتكون A_n متناقصة... $A_n \subset A_{n-1} \subset$ وتقاطعها هو الحادثة $\{ X \leq a \}$ ؛ أي أن

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{ X \leq a \}$ ولذلك يمكننا كتابة ما يلي :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} P\left\{ X \leq a + \frac{1}{n} \right\} &= \lim_{n \to \infty} \left(a + \frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} P(A_n) \\
&= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \\
&= P\{ X \leq a \} \\
&= F(a)
\end{aligned}$$

أي أن $\lim F\left(a + \frac{1}{n} \right) = F(a)$ ومنه ينتج أن $F(x)$ متصلة من اليمين.

نتيجــة : تكون F دالة توزيع للمتغير العشوائي X إذا، وإذا فقط، تحقق F الخواص من(أ) وحتى (د).

مـثـال ١ , ٢ , ٣

إذا كان X متغيراً عشوائيّا بكثافة احتمال :

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \ , & x = 1 \\ \frac{1}{2} \ , & x = 2 \\ \frac{1}{8} \ , & x = 3, 4 \end{cases}$$

فإن دالة التوزيع $F(x)$ هي :

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 \ , & x < 1 \\ \frac{1}{4} \ , & 1 \le x < 2 \\ \frac{3}{4} \ , & 2 \le x < 3 \\ \frac{7}{8} \ , & 3 \le x < 4 \\ 1 \ , & 4 \le x \end{cases}$$

مثال ٢ , ٢ , ٣

إذا كانت لدينا دالة F معرفة بالعلاقة :

$$F(x) = \sin(x) \quad , \ -\infty < x < \infty$$

فإن الدالة F ليست متزايدة ولاتحقق الخاصيتين الأولى والثانية، ولاتكون بالتالي دالة توزيع.

مثال ٣ , ٢ , ٣

إذا كان لدينا الدالة التالية:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x+1}{2} & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

هل $F(x)$ دالة توزيع للمتغير العشوائي X ؟

الحل:

من الواضح أن $0 \le F(x) \le 1$، وكذلك $F(x)$ متصلة من اليمين. وأن $F(x)$ متزايدة في x، وتحقق $F(-\infty) = 0 \ , \ F(\infty) = 1$ ونقول إن الدالة $F(x)$ هي دالة توزيع للمتغير X. يلاحظ أن: $F(0^-) = 0 \ , \ F(0^+) = \frac{1}{2}$

وهذا يعني أن $F(x)$ ليست دالة متصلة عند 0، ومن ذلك ينتج أن الدالة $F(x)$ ليست دالة توزيع للمتغير العشوائي المتصل حيث يوجد المقدار $F(0^+) - F(0^-) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ عند النقطة 0. بينما عند النقطة $x > 0$ تحقق $F(x)$ خصائص دالة التوزيع للمتغير المتصل. وبصورة عامة فإن دالة التوزيع السابقة $F(x)$ ليست دالة توزيع دائما لمتغير متصل أو لمتغير منفصل، وإنما دالة توزيع خليط من النوعين.

مثال ٤ , ٢ , ٣

في تجربة رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة، كان X متغيرًا عشوائيًا معرفا على فراغ العينة S ، ويمثل عدد مرات ظهور الصورة (H). فراغ العينة هو $S = \{H , T\}$

ويمكن تعيين قيم للمتغير العشوائي X من نقاط العينة في S هي 0,1 واحتمالاتها المقابلة هي :

$$P(X=0) = P(\{T\}) = 0$$

$$P(X=1) = P(\{H\}) = 1$$

يمكن الآن بناء دالة التوزيع $F(x) = P(X \;\; x)$ كما يلي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \;, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \;, & 0 \le x < 1 \\ 1 \;, & x \ge 1 \end{cases}$$

٣,٣ المتغير العشوائي المنفصل ودالة توزيعه

يقال بأن المتغير العشوائي X منفصل (discrete) إذا كان يأخذ قيمًا منتهية أو غير منتهية قابلة للعد. فمثلا إذا كان X متغيرا عشوائيا، ويأخذ قيما منتهية $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ أو غير منتهية وقابلة للعد $\dots , x_1 , x_2 , \dots , x_n , x_{n+1}$.

من أمثلة المتغيرات العشوائية المنفصلة نذكر : عدد مرات ظهور الصورة H في تجربة رمي قطعة نقود معدنية، ومجموع النقاط الظاهرة على الوجهين العلويين لقطعتي النرد، وعدد وفيات حادث ما، وعدد البكتريا في كمية معينة من الماء وغير ذلك. يمكننا الآن إعطاء التعريف التالي :

تعريف ١,٣,٣ (المتغير العشوائي المنفصل)

يقال بأن المتغير العشوائي X منفصل، إذا كان يوجد مع X عدد منته أو غير منته قابل للعد من القيم ذات الاحتمالات الموجبة، ومجموع هذه الاحتمالات الموجبة يساوي الواحد الصحيح.

تـعـريـف ٢ , ٣ , ٣ (دالة المتغير العشوائي المنفصل)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا منفصلا يأخذ قيمًا $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ، فإن الدالة P(x) أو f(x) المعطاة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) \ , & i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ 0 & , \quad x \neq x_i \end{cases}$$

تسمى دالة احتمال (probability function) للمتغير العشوائي المنفصل X أو دالة الثقل الاحتمالية (probability mass function) للمتغير العشوائي المنفصل X.

تسمى القيم التي يأخـذها المغيـر العشوائي المنفصـل $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ـ ذات الاحتمالات الموجبة ومجموع احتمالاتها يساوي الواحد الصحيح ـ نقـط الاحتمـال (probability points) أو نقط القفـز (jump points). يعيّن الاحتمـال $P(X = x_i)$ احتمال الحادثة بأن المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ القيمة x_i .

تـعـريـف ٣ , ٣ , ٣ (دالة توزيع للمتغير العشوائي المنفصل)

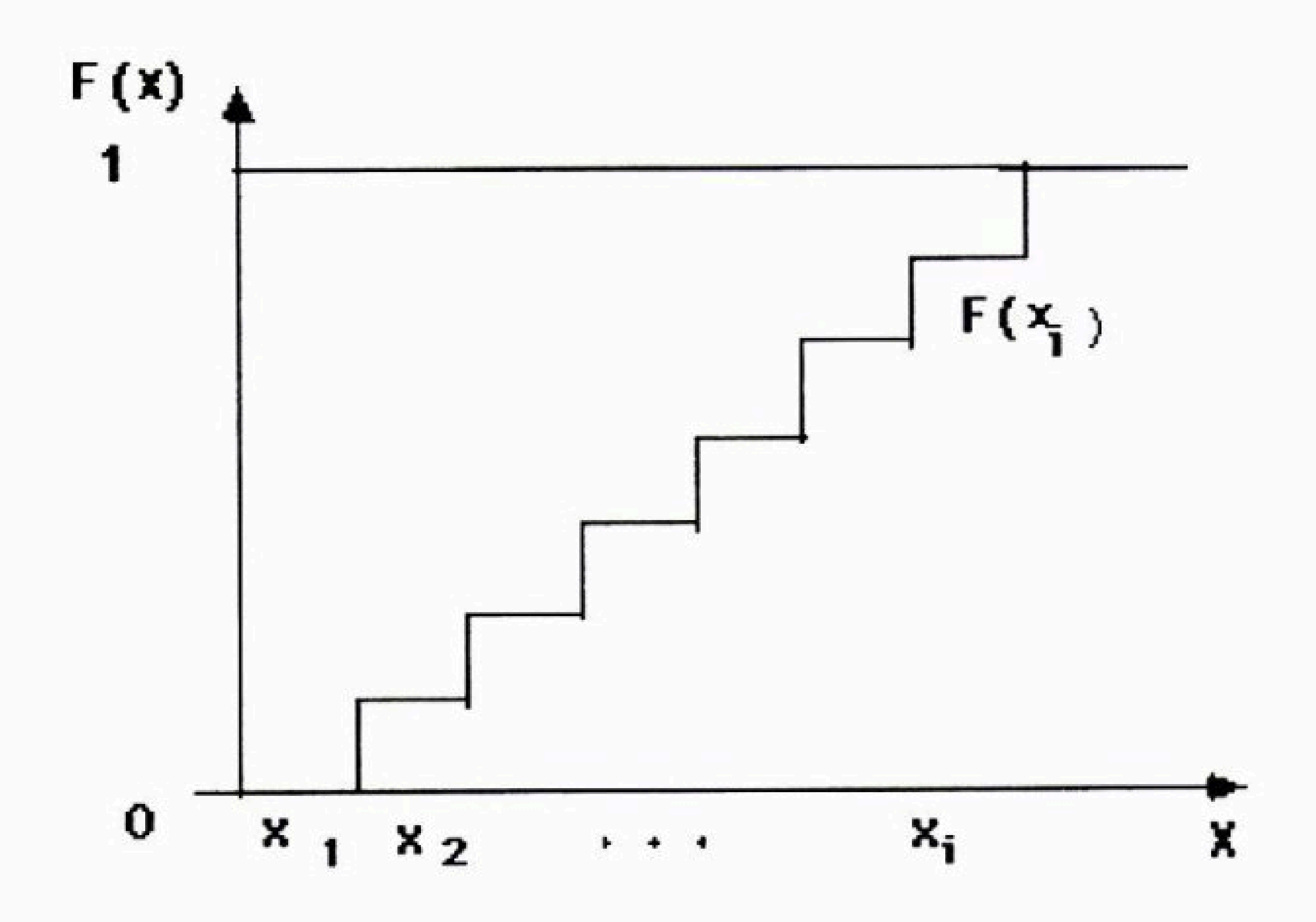
إذا كان X متغيرًا عشوائـيًا منفصلا له دالة احتمـال f(x)، فإن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المنفصل تعطى بالصيغة $F(x) = P(X \leq x) = \sum_i f(x_i)$

حيث إن عـلامة الجمـع مأخـوذة عـلى كـل x_i وهي أقـل مـن أو تـساوي القـيمة x لـكـل $(x_i \leq x)$. يمكن ملاحظة أنه إذا كان $x = \infty$ فإن قيمة دالة التوزيع F(x) للمتغير العشوائي المنفصل تساوي الوحدة؛ أي أن:

$$F(x = \infty) = \sum_i f(x_i) = 1$$

تأخذ دالة التوزيـع F(x) في حالة المتغير العشوائي المنفصل شكلا سـلّميا وتـسمى دالـة سلّمـية (step function)، وهذا التمثيل البياني خطوط أفقية بـين

كل قيمتين متتاليتين وبخطوة ارتفاعها $f(x_i)$ عند كل قيمة x_i (انظر الشكل رقم ٣,١). نلاحظ من الشكل أن F(x) دالة مستمرة بين الخطوات وثابتة.



الشكل رقم (٣,١): رسم دالة التوزيع F(x) .

يمكننا الآن أن نورد تعريفا آخر للمتغير العشوائي المنفصل.

تعريف ٣,٣,٤ (المتغير العشوائي المنفصل)

يقال بأن المتغير العشوائي X منفصل إذا كانت دالة توزيعه F(x) سلّمية عند القيم الممكنة له، وثابتة فيما بينها، وارتفاع كل خطوة عند كل نقطة x هو احتمال الحادثة X = x أي أن:

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

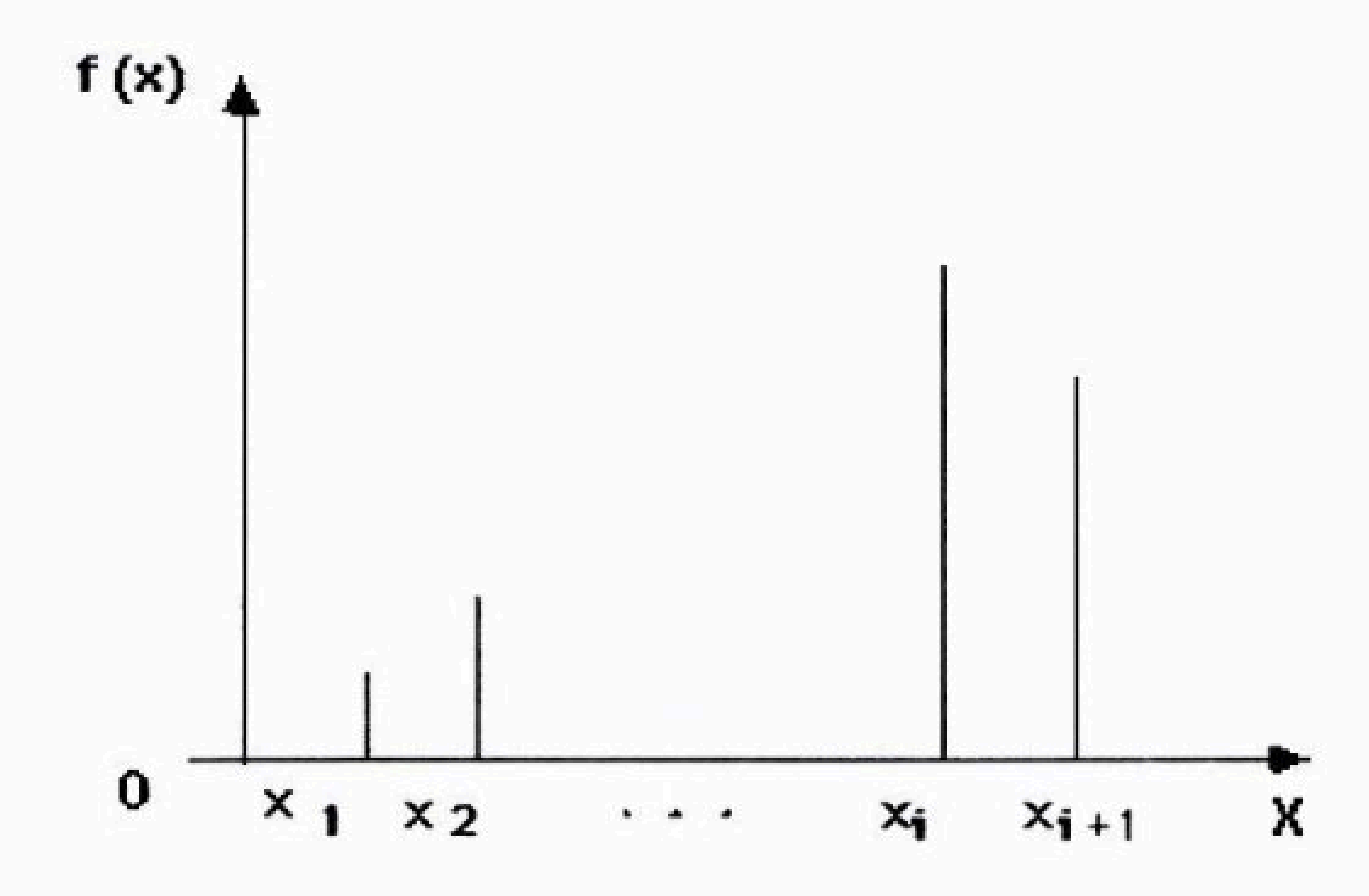
تعريف ٥ , ٣ , ٣ (التوزيع الاحتمالي)

تسمى المجموعة التي عناصرها الأزواج المرتبة $\{x_i , f(x_i)\}$ لكل $i = 1, 2, ...$ بالتوزيع الاحتمالي (probability distribution) .

يمكن وضع التوزيع الاحتمالي في جدول يحتوي على القيم الممكنة للمتغير العشوائي X واحتمالاتها المقابلة $f(x_i) = P(X = x_i)$ ، ويطلق على هذا الجدول اسم الجدول الاحتمالي (probability table) .

القيمة x_i	x_1	x_2	x_3	... x_n ...
الاحتمال $f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	... $f(x_n)$ ...

يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي رياضـيًا وبيانـيًا؛ فتمثيله رياضيا يكون في إيجـاد صيغة رياضية للدالة f(x) لكل قيم X الممكنة، وأما التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي فهو رسم محورين متعامدين بحيث نضع القيم $x_1 , x_2 , ... , x_n$ على المحور الأفقي، ونرسم خطوطا عمودية بارتفاع مساو لقيم $f(x_1) , f(x_2) , ... , f(x_n)$ على هذه القيم. يمكن كذلك تمثيل التوزيع الاحتمالي بواسطة المدرج الاحتمالي (probability histogram).



الشكل رقم (٢ , ٣): رسم دالة الاحتمال f(x) .

إذا كان X متغيـرًا عشوائيًا منفصلا له دالة احتمـال f(x) فإن f(x) تحقق الخواص التالية :

(أ) لكل i نجد أن $f(x_i) \geq 0$.

(ب) $\sum_i f(x_i) = 1$.

نلاحظ أن الخاصية (أ) تحدد أن احتمال أي ناتج من النـواتج x_i أكبر من أو يساوي صفرا، والخاصية (ب) تبين أن مجموع هذه الاحتمالات عند كل القيـم الممكنة x_i يجب أن يساوي واحدا.

نـظريـة ١,٣,٣

إذا كان X متغيرًا عشوائـيًا منفصلا، فإنه يمكن الحصول على دالة توزيعـه F(x) من دالة الاحتمال f(x) والعكس صحيح.

البرهـان :

إذا كان للمتغيرX القيم ... ,x_1, x_2 ، وأن f(x) معرفة، عندئذ تكون:

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

الآن نفرض العكس؛ وهو أن $F_X(x)$ معطاة فعليه يكون :

$$f(x_j) = F(x_j) - \lim_{0 < h \longrightarrow 0} F(x_j - h)$$

$$= F(x_j) - F(x_j^-)$$

إذن يمكـن الحـصـول عـلـى f(x) لـكـل الـنـقـط x_j ولأن $f(x) = 0 \quad \forall\, x \neq x_j \,,\, j = 1, 2, \ldots$، إذن f(x) موجودة لكل الأعداد الحقيقية.

مثـال ١ , ٣ , ٣ (مثال توضيحي للنظرية ١ , ٣ , ٣)

في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة كان X يمثل عدد النقط الظاهرة علـى الوجه العلوي لقطعة النرد. تعطى دالة الاحتمال f(x) ودالة التوزيع F(x) للمتغير العشوائي X بالصيغتين:

$$f(x_j) = \frac{1}{6} \qquad , \ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$F(x_j) = \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{6} \ , \ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

من النظرية (١ , ٣ , ٣) إذا كانت دالة الاحتمال f(x) موجودة فيمكن الحصول على دالة التوزيع F(x) لأي قيمة x إذا كانت x = 2.5 وتكون :

$$F(2.5) = \sum_{x_j < x} f(x)$$

$$= f(1) + f(2)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

وإذا كانت F(x) موجودة فيمكن الحصول على f(x) لأي قيمة x؛ فمثلا عند القيمة x=3 نجد أن:

$$f(x) = f(3) = F(3) - \lim_{0<h \to 0} F(3-h)$$

$$= F(3^+) - F(3^-)$$

$$= \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

مثال ٢,٣,٣

أوجد دالة الاحتمال (التوزيع الاحتمالي) ودالة التوزيع لعدد مرات ظهور الصورة (H) في تجربة رمي ثلاث قطع معدنية متزنة. ثم مثل التوزيع الاحتمالي بيانيا.

الحل:

يحتوي فراغ العينة S في تجربة رمي ثلاث قطع معدنية على $2^3 = 8$ نقطة عينة ويمكن كتابة:

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTT \}$$

نفرض أن المتغير العشوائي X منفصل، ويرمز لعدد مرات ظهور الصورة H. القيم الممكنة x للمتغير العشوائي X هي 0, 1, 2, 3 واحتمالاتها هي:

$$f(x) = f(0) = P(X = 0) = P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$$

$$f(x) = f(1) = P(X = 1) = P(\{HTT,\ THT,\ TTH\}) = \frac{3}{8}$$

$$f(x) = f(2) = P(X = 2) = P(\{HHT,\ HTH,\ THH\}) = \frac{3}{8}$$

$$f(x) = f(3) = P(X = 3) = P(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$$

يمكن وضع هذه المعلومات في شكل جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

عدد مرات ظهور الصورة (H) x_i	0	1	2	3
الاحتمال $f(x_i) = P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

يمكن كذلك تمثيل التوزيع الاحتمالي بصيغة رياضية، وللحصول على ذلـك قد نحتاج إلى معادلة رياضية لاختيار عدد x من الصور (H) من 3 صور مقسوما على عدد نقط فراغ العينة؛ أي أن عدد الطرق الممكنة لاختيار عدد x من الصور من 3 صور يساوي $\binom{3}{x}$ طريقة.

عدد نقط فراغ العينة في هذه التجربـة $2^3 = 8$. ومن ذلك يمكن الحصول على المعادلة الرياضية التالية:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{3}{x}}{8} = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad , \quad x = 0, 1, 2$$

من النظرية (١ ,٣ ,٣)، ولأن دالة الاحتمال f(x) موجود، فإنه يمكن الحصول على دالة التوزيع $F(x) = \sum_{x_j \le x} f(x_j)$ كما يلي:

إذا كان $x < 0$ فإن:

$$P(X < x) = 0$$

إذا كان $0 \le x < 1$ فإن:

$$P(X < x) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

إذا كان $1 \le x < 2$ فإن:

$$P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

وبالمثل لقيم $2 \le x < 3$ نحصل على:

$$P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

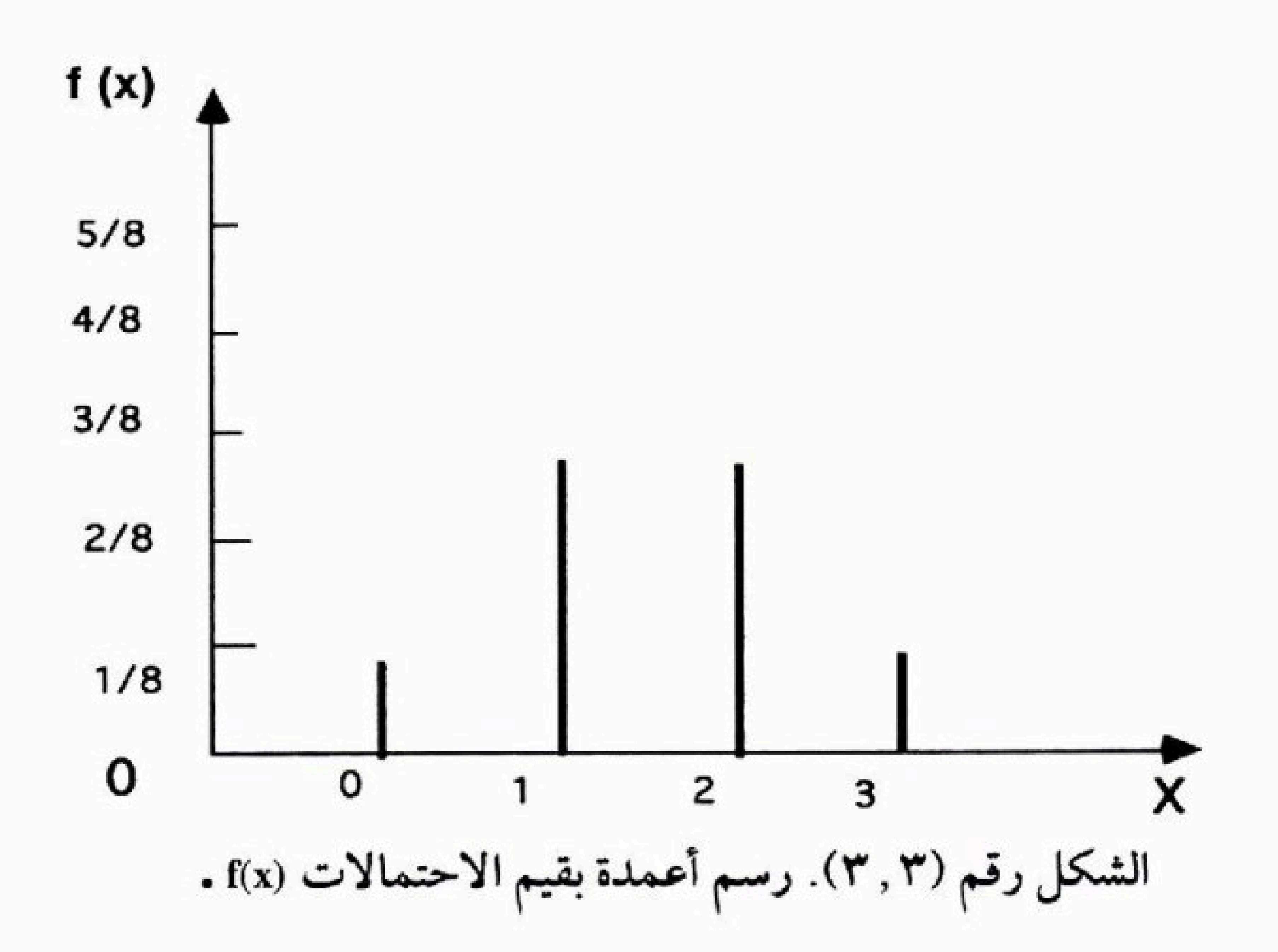
وأخيرا إذا كان x 3 فإن:

$$P(X < x) = \sum_{i=0}^{3} P(X = i) = 1$$

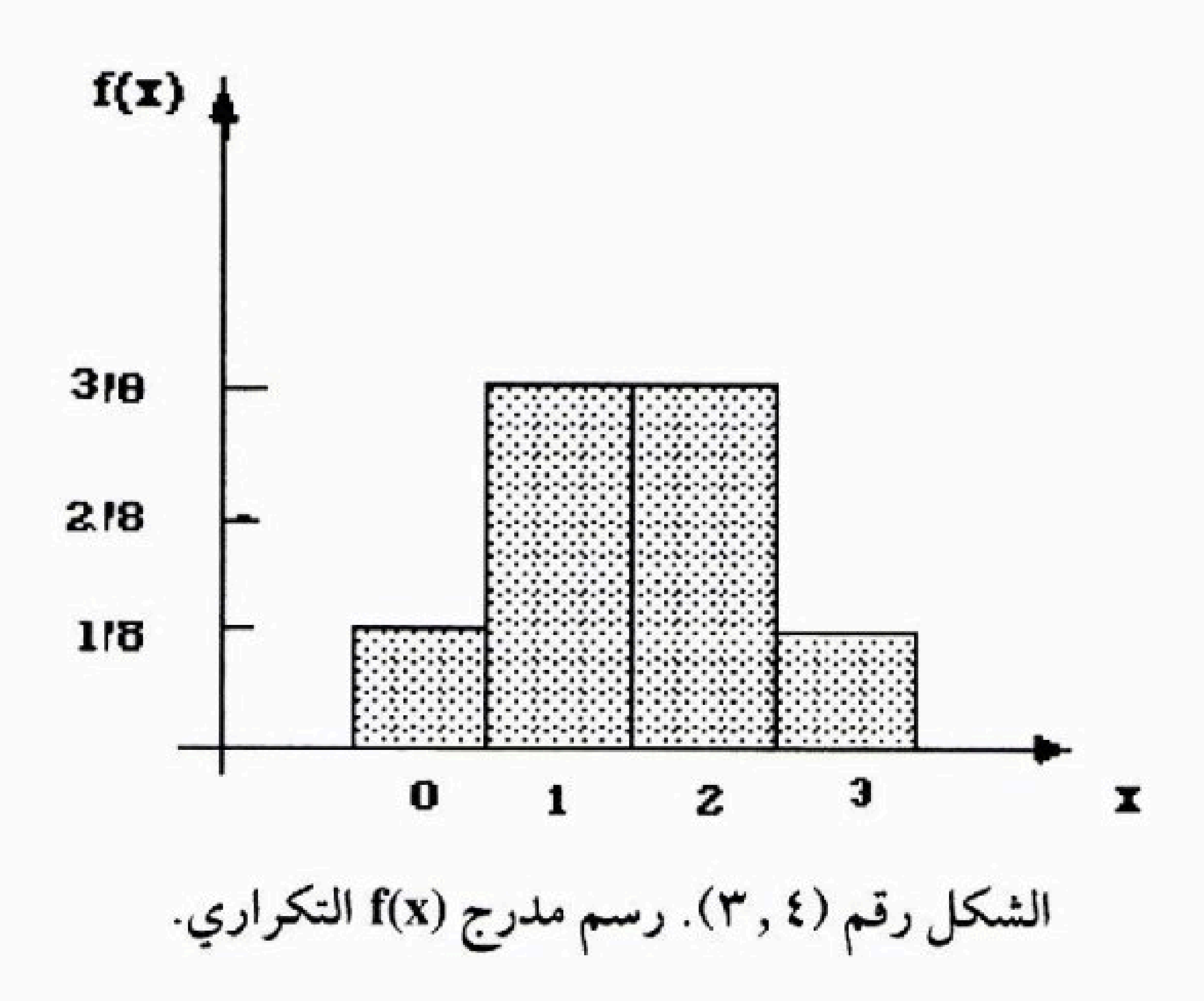
الآن يمكن كتابة دالة التوزيع F(x) في الصيغة المبسطة التالية:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < 0 \\ \frac{1}{8} \ , & 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{8} \ , & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} \ , & 2 \le x < 3 \\ 1 \ , & 3 \le x \end{cases}$$

يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي بطريقتي الأعمدة شكل رقم (٣، ٣)، والمدرج الاحتمالي شكل رقم (٣، ٤).

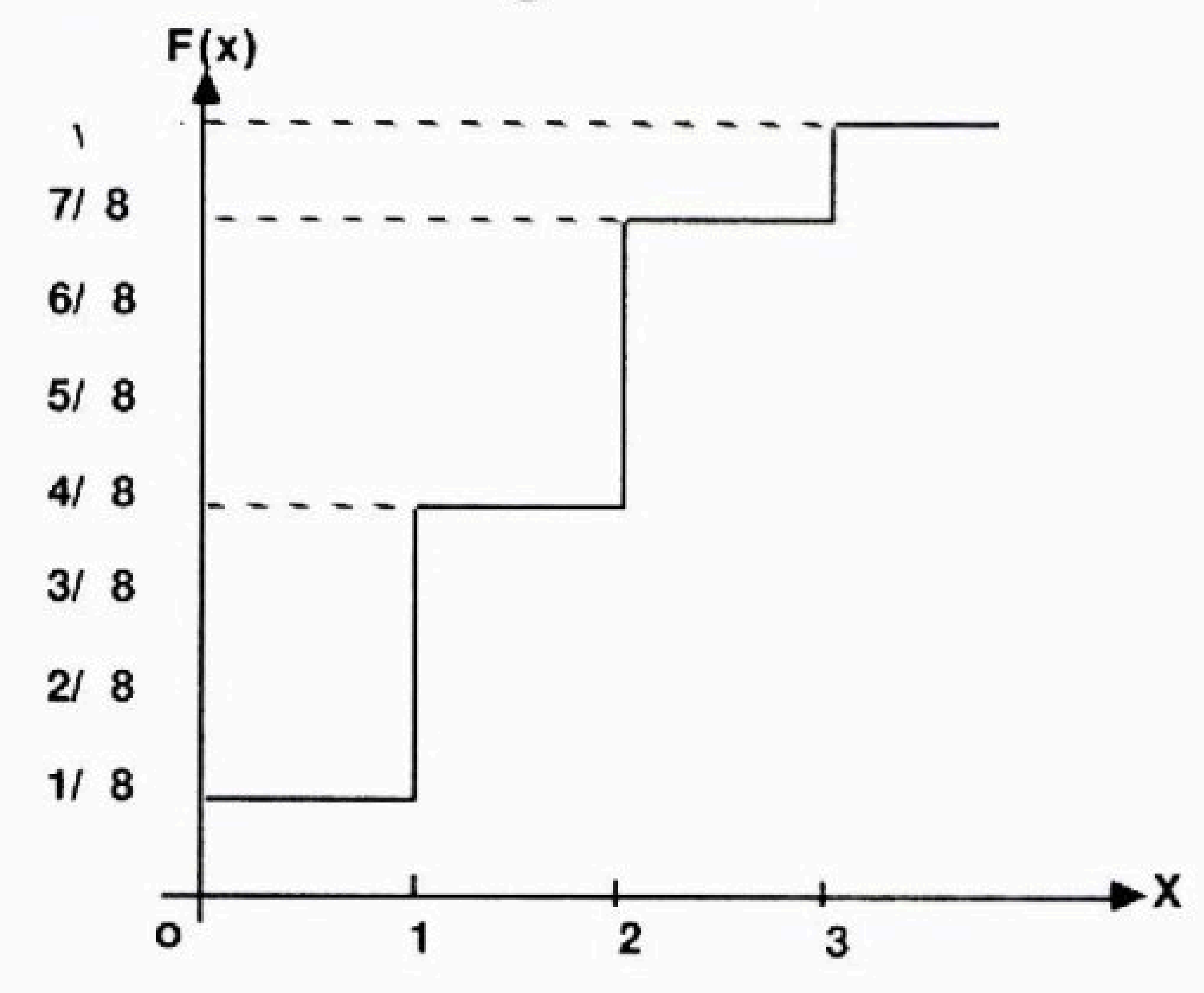


الشكل رقم (٣، ٣). رسم أعمدة بقيم الاحتمالات f(x).



الشكل رقم (٤ , ٣). رسم مدرج f(x) التكراري.

إن تجربة رمي قطعة نقود وماشابهها من تجارب لمتغيرات عشوائية منفصلة، إلا أنه قد يكون لدينا الرغبة أحيانا في التعرف على نوعية المتغير العشوائي من حيث كونه منفصلا أو متصلا، ولمعرفة ذلك نلجأ غالبا إلى التمثيل البياني لدالة التوزيع المعطاة لدينا. ويمكن تمثيل دالة التوزيع F(x) كما بالشكل رقم (٥ , ٣).



الشكل رقم (٥ , ٣). رسم دالة التوزيع F(x).

يمكن ملاحظة أنه يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي بيانيا برسم النقط $(x_i , f(x_i))$ بينما التمثيل البياني لدالة التوزيع هو رسم النقط $(x_i , F(x_i))$.

نلاحظ أنه يمكن الجزم، من التمثيل البياني لدالة التوزيع $F(x)$، بأن المتغير العشوائي المعرّف على فراغ العينة S في التجربة السابقة هو متغير عشوائي منفصل لأن دالة توزيعه دالة سلّمية.

مثال ٣,٣,٣

يعمل في أحد الأقسام الأكاديمية بالجامعة ستة أساتذة منهم 3 متعاقدين و 3 سعوديين. يُراد اختيار أستاذين للإشراف الأكاديمي بطريقة عشوائية. إذا كانت Y تمثل عدد السعوديين الذين تم اختيارهم. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y ؟

الحل :

عدد الطرق التي يتم بها اختيار أستاذين من جملة 6 أساتذة هو $15 = \binom{6}{2}$ ويحتوي فراغ العينة S على 15 نقطة عينة. لأن الاختيار تم بطريقة عشوائية، فيمكن القول إن S فراغ عينة ذو احتمالات متساوية، وبلغة الرموز نكتب :

$$P(E_i) = \frac{1}{15} \quad , \quad i = 1, 2, ..., 15$$

نفرض أن المتغير العشوائي Y يمثل عدد السعوديين المختارين، وتكون القيم الممكنة للمتغير Y هي 0 , 1 , 2، والاحتمالات المقابلة هي:

$$P(\text{عدم اختيار سعوديين}) = P(Y = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{5}$$

حيث إن عدد عناصر الحادثة $\{$عدم اختيار سعوديين$\} = \{Y = 0\}$ هو $\binom{3}{2}\binom{3}{0}$ أي أن ذلك يعني عدد الفرق الممكنة لاختيار 0 من السعوديين و 2 من المتعاقدين. وبالمثال يمكن إيجاد:

$$P(\text{اختيار سعودي واحد}) = P(Y=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$P(\text{المختاران سعوديان}) = P(Y=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{5}$$

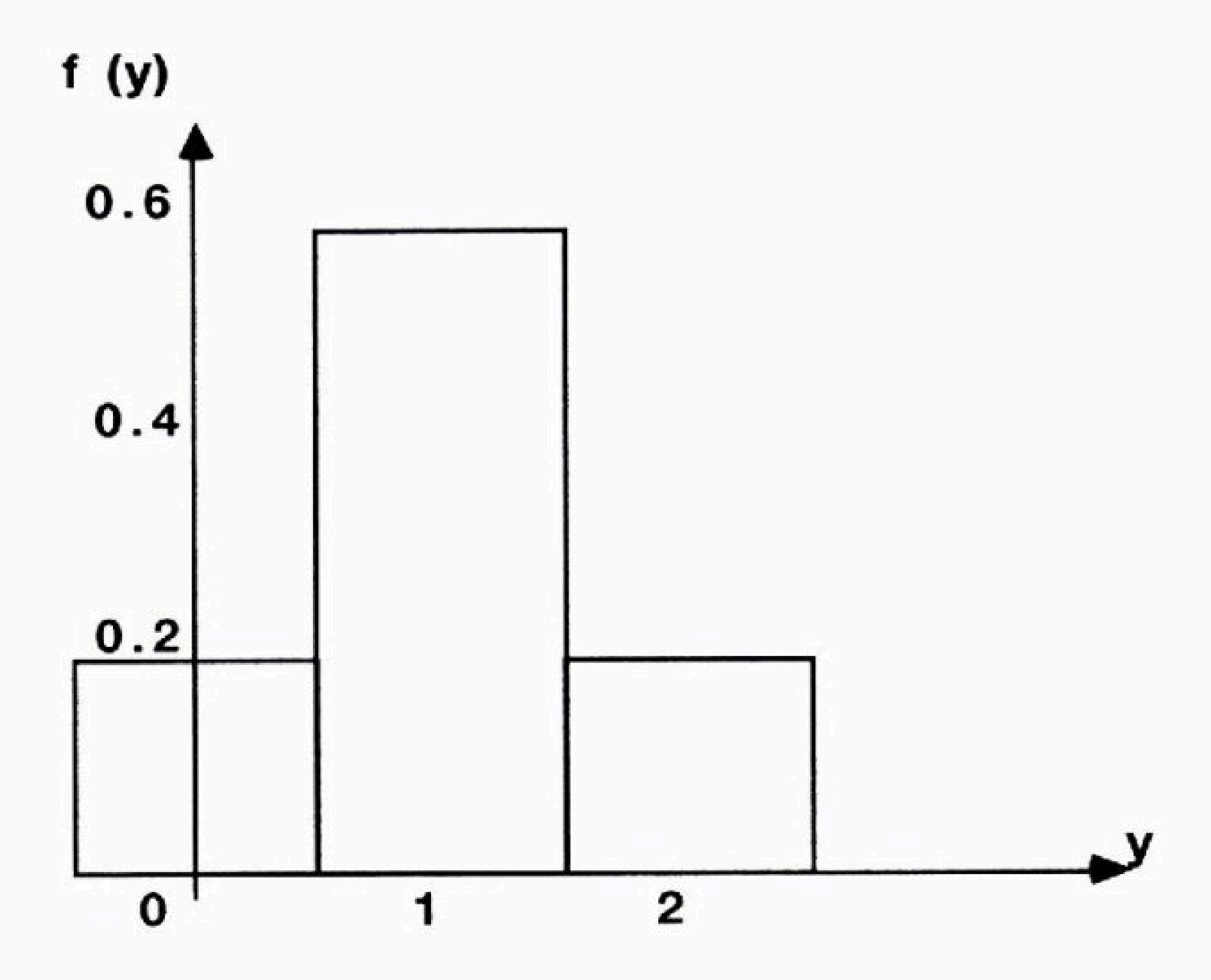
من الملاحظ أن الحادثة $\{Y = 1\}$ هو الأكثر احتمالا ويبدو معقولا لأن عدد السعوديين يساوي عدد المتعاقدين.

وحيث إن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل Y هو دوال ذات قيم منتهية أو غير منتهية قابلة للعد فإنه، كما هو الحال في المثال السابق، يمكن عرض ذلك في جدول وتمثيله بيانيا، ووضع ذلك في صيغة رياضية معينة.

الآن يمكننا تكوين الجدول الاحتمالي التالي الذي يتكون من $(y, f(y))$.

y	f(y)
0	1/5
1	3/5
2	1/5

يمكن تمثيل هذا الجدول الاحتمالي بالمدرج الاحتمالي شكل رقم (٣،٦) التالي:



الشكل رقم (٦ , ٣). رسم المدرج التكراري لدالة الاحتمال.

فرضنا، في المدرج الاحتمالي، أن عرض كل مستطيل هو 1؛ فعليه تكـون مساحته مساوية لاحتمال Y عند القيمة التي يتمركز عليها ذلك المستطيل؛ فمثلا مساحة المستطيل الذي يتمركز عند القيمة 0 مساوية لاحتمال الحادثة $\{Y = 0\}$.
من الطرق الأكثر فائدة لتمثيل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي هي إيجاد صيغة رياضية لذلك التوزيع. يمكن كتابة الصيغة الرياضية لدالة الاحتمال f(y) كما يلي:

$$f(y) = P(Y = y) = \frac{\binom{3}{y}\binom{3}{2-y}}{\binom{6}{2}} \quad , \quad y = 0, 1, 2$$

يمكن ملاحظة أن التوزيع الاحتمالي لهذا المثال يحقق الخواص التالية :

(أ) $0 \le f(y) \le 1$.

(ب) $\sum f(y) = 1$.

ويمكن القول أن التوزيع الاحتمالي الممثل بالدالـة f(y) هو نموذج تقليدي وليس تمثيلا صحيحًا ودقيقًا في حد ذاته.

مثال ٤ , ٣ , ٣

في تجربة رمي زهرتي نرد، إذا كـان X متغيرًا عشوائيًا يمثل مجموع النقـط الظاهرة على الوجهين العلويين لقطعتي النرد.

(أ) ماالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟

(ب) ضع التوزيع الاحتمالي في جدول احتمالي.

(جـ) مثل التوزيع الاحتمالي رياضيًا.

الحـل :

كما هو معروف أن فراغ العينة في تجربة رمي قطعتي نرد يحتوي عـلـى 36 نقطة، وهو فراغ ذو احتمالات متساوية؛ أي أن لكل نقطة عينة الاحتمال $\frac{1}{36}$.

وحيث إن X متغير عشوائي يمثل مجموع النقط الظاهرة على الـوجـهـين العلويين لقطعتي النرد، فإن القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائـي X وهي 12 , ... , 3 , 2 واحتمالاتها المقابلة تحسب كما يلي :

$$f(2) = P(X = 2) = P(\{1 , 1\}) = \frac{1}{36}$$

$$f(3) = P(X = 3) = P(\{1 , 2\} , \{2 , 1\}) = \frac{2}{36}$$

$$f(4) = P(X = 4) = P(\{1 , 3\} , \{3 , 1\} , \{2 , 2\}) = \frac{3}{36}$$

$$f(5) = \frac{4}{36} \;,\; f(6) = \frac{5}{36} \;,\; f(7) = \frac{6}{36} \;,\; f(8) = \frac{5}{36}$$

وبالمثل :

$$f(9) = \frac{4}{36} \;,\; f(10) = \frac{3}{36} \;,\; f(11) = \frac{2}{36} \;,\; f(12) = \frac{1}{36}$$

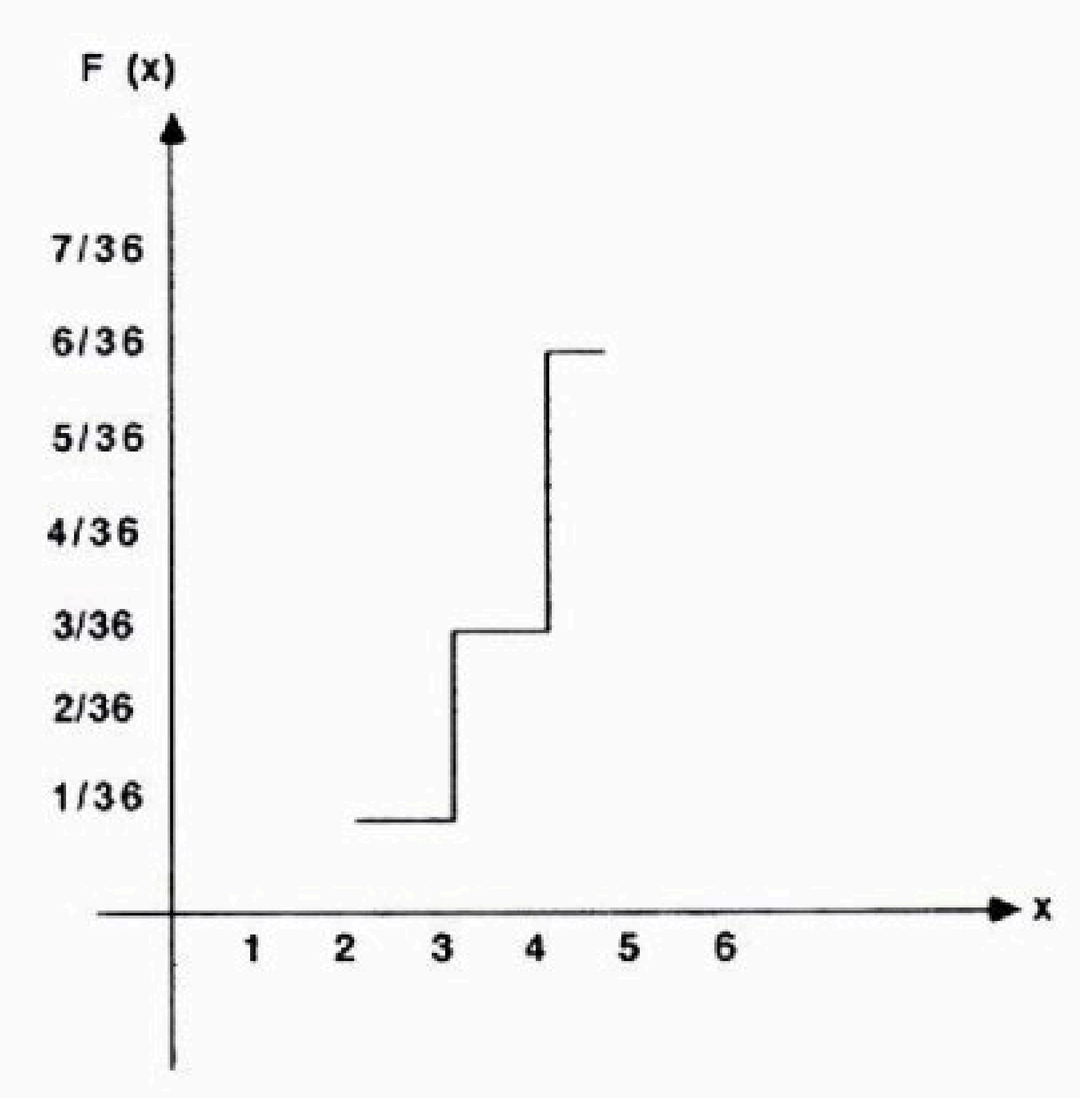
(ب) يمكن عرض التوزيع الاحتمالي السابق في الجدول الاحتمالي التالي:

x	2	3	4	5	6	7
f(x) = P(X = x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36
x	8	9	10	11	12	___
f(x) = P(X = x)	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	___

(جـ) يمكن تمثيل التوزيع أعلاه بالصيغة الرياضية:

$$f(x) = \frac{6 - |7 - x|}{36} \quad , \quad x = 2, 3, \ldots, 12$$

من الطبيعي أن تجربة رمي زهرة النرد وماشابهها من التجارب هي تجـارب عشوائية منفصلة، ولتوضيح ذلك يمكن تمثيل دالة الـتـوزيـع F(x) بالشكل رقم (٣,٧) تمثيلا بيانيًا.



الشكل رقم (٣,٧). رسم جزء من دالة التوزيع الاحتمالية.

من الواضح أن الدالة $f(x)$ سلّمية وتصف دالة احتمال لمتغير عشوائي منفصل.

مثـال ٣,٣,٥

إذا كان X متغيراً عشوائيّا له دالة التوزيع :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x}{2} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3} & , \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{12} & , \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & , \quad 3 \le x \end{cases}$$

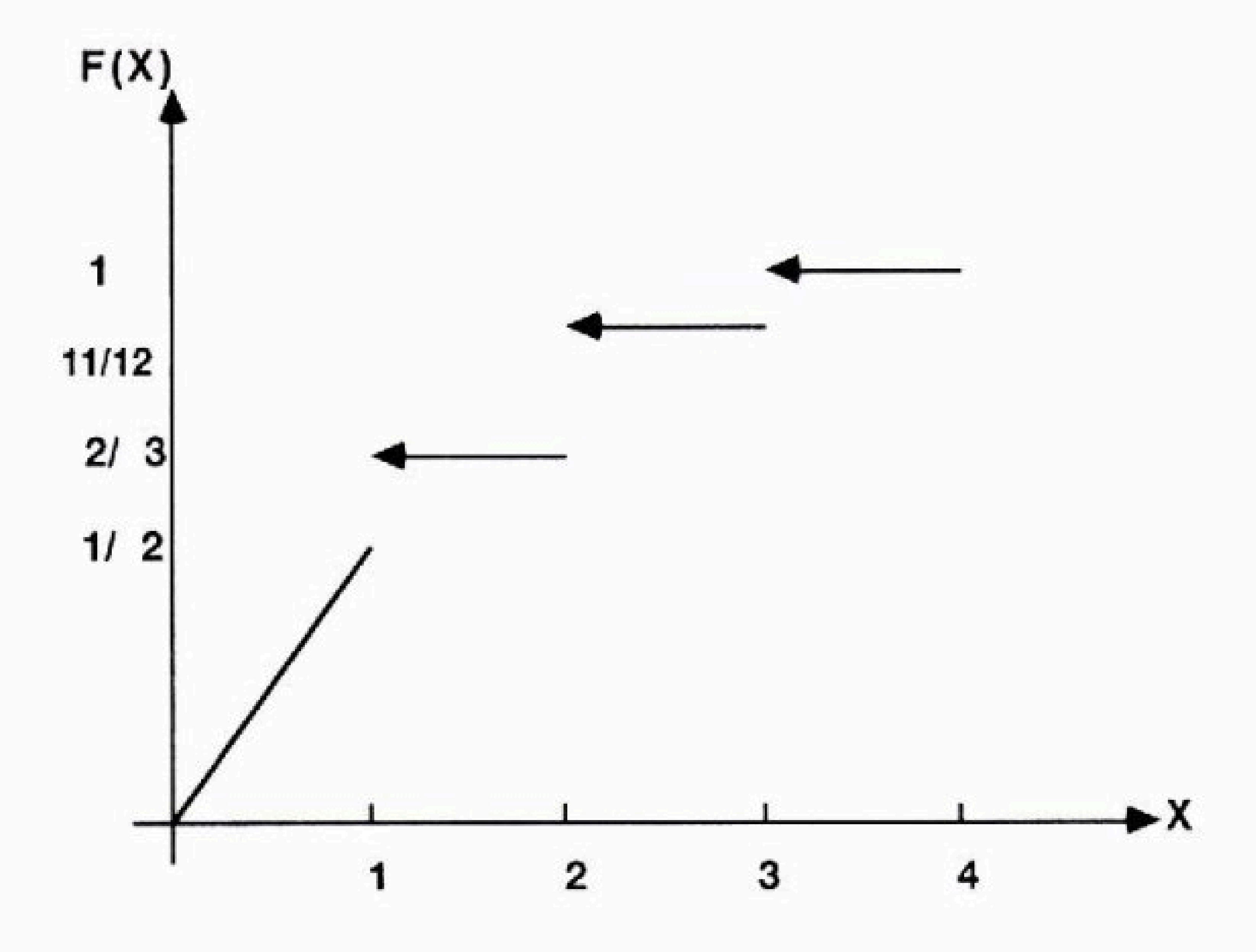
فأوجد ما يلي:

(أ) تمثيل هذه الدالة بيانيا.

(ب) الاحتمالات $P(2 < x \le 4)$, $P\left(x > \frac{1}{2}\right)$, $P(x = 1)$, $P(x \le 3)$.

الحـل :

(أ) يمكن تمثيل دالة التوزيع $F(x)$ بيانيّا كما في الشكل رقم (٣,٨) التالي:



الشكل رقم (٨ , ٣). رسم دالة التوزيع الاحتمالي.

من الواضح أن الدالة F(x) سلّمية ولذا فإن المتغير العشوائي تحت الدراسة متغير عشوائي منفصل.

(ب) لاحظ أن

$$P(X < 3) = \lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(X \leq 3 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = \frac{11}{12}$$

يمكن ملاحظة أننا قد استخدمنا «خاصية الاتصال»؛ أي أنه لحساب احتمال الحادثة $\{X < b\}$ نحصل على :

$$P(X < b) = P\left(\lim_{n \to \infty} \left(X \leq b - \frac{1}{n} \right) \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\left(X \leq b - \frac{1}{n} \right) = \frac{11}{12}$$

$$= \lim_{n \to \infty} F\left(b - \frac{1}{n} \right)$$

وأن احتمال الحادثة $\{X < b\}$ لايساوي بالضرورة F(b) ؛ لأن F(b) تتضمن أيضًا احتمال الحادثة $\{X = b\}$.

$$P\{X = 1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\}$$

$$= F(1) - \lim_{n \to \infty} P\left(X \leq 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$= F(1) - \lim_{n \to \infty} F\left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P\left\{ X > \frac{1}{2} \right\} = 1 - P\left\{ X \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$= 1 - F\left(\frac{1}{2} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\{2 < X \leq 4\} = F(4) - F(2)$$

$$= 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

مثال ٦ , ٣ , ٣

إذا كانت دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي المنفصل X معطاة بالصيغة الرياضية:

$$f(x) = \frac{c\,\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots \quad , \quad \lambda > 0$$

فأوجد كلا من $P\{X = 0\}$, $P\{X > 2\}$.

الحل:

حيث إن $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ فإن $1 = \sum_{x=0}^{\infty} c\,\frac{\lambda^x}{x!} = c \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$ ،

ولكن $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$.

ومن ذلك يستنتج أن $c\,e^{\lambda} = 1$ إذن $c = e^{-\lambda}$.

$$P\{X = 0\} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

$$P\{X > 2\} = 1 - P\{X \leq 2\}$$

$$= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\}$$

$$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

مثـال ٣،٣،٧

سحبت ثلاث كرات بدون إرجاع من صندوق يحتوي على 20 كرة مرقمة من 1 إلى 20 ، وكان هناك توقع بأن تحمل كرة واحدة على الأقل من الكرات المسحوبة رقما أكبر من 17. ما احتمال تحقق هذا التوقع؟

الحـل :

نفرض أن X يمثل أكبر عدد يمكن اختياره، فيكون X متغيرًا عشوائيًا يأخذ واحدا من القيم 3,4,5,...,20. عدد عناصر فراغ العينة S هو $\binom{20}{3}$ ، وهو عدد الطرق التي يتم بها اختيار ثلاث كرات من بين 20 كرة. ومن ذلك يمكن استنتاج دالة الاحتمال التالية :

$$P\{X=i\} = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}} \quad , \quad i = 3, 4, ..., 20$$

وذلك يعني أن عدد الاختيارات التي تنتج عنها الحادثة $\{X=i\}$ هو عدد الاختيارات التي ينتج عنها كرة تحمل الرقم i وكرتان أخريان تحملان الأرقام من 1 إلى $i-1$؛ أي أنه يوجد لدينا $\binom{1}{1}\binom{i-1}{2}$ طريقة ممكنة. من دالة الاحتمال أعلاه يمكننا الآن إيجاد مايلي:

$$P\{X=20\} = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{20} = 0.150,$$

$$P\{X=19\} = \frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{51}{380} = 0.134,$$

$$P\{X = 18\} = \frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{34}{285} = 0.119,$$

$$P\{X = 17\} = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{2}{19} = 0.105.$$

إذن نلاحظ أن الحادثـة $\{X \geq 17\}$ هي اتحاد الحوادث المنفصلـة $\{X = i\}$ حيـث $i = 17, 18, 19, 20$ أي أن: $\{X \geq 17\} = \bigcup_{i=17}^{20} \{X = i\}$، ويكون احتمال تحقـق التوقع هو:

$$\begin{aligned} P\{X \geq 17\} &= P\left(\bigcup_{i=17}^{20} \{X = i\} \right) = \sum_{i=17}^{20} P\{X = i\} \\ &= 0.105 + 0.119 + 0.134 + 0.150 \\ &= 0.508 \end{aligned}$$

٤ , ٣ المتغير العشوائي المتصل ودالة كثافة الاحتمال

يفترض أن يحتوي المتغير العشوائي المتصل أو المستمر على كل قيمة ممكنة في الفترة $[a, b]$ حيث $a < b$، وتأخذ القيم $-\infty$, $+\infty$ على التوالي؛ أي أن $a = -\infty$, $b = +\infty$.، وبعبارة أخرى يسمى المتغير متصلا أو مستمرا إذا كان مجموع القيم الممكنة غير قابـل للعد. من أمثلة المتغيرات العشوائية المستمرة نذكر: الأطـوال والأوزان، ودرجة حرارة مكان ما، ومعدل نزول المطر، وزمن وصول القطـــار لمحطة ما، ومدة صلاحية جهاز ما. . . وغير ذلك. وكما هو الحـــال في المنفصل، سوف نقـــوم بدراسـة دالة التوزيـــع ودالة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصـــل.

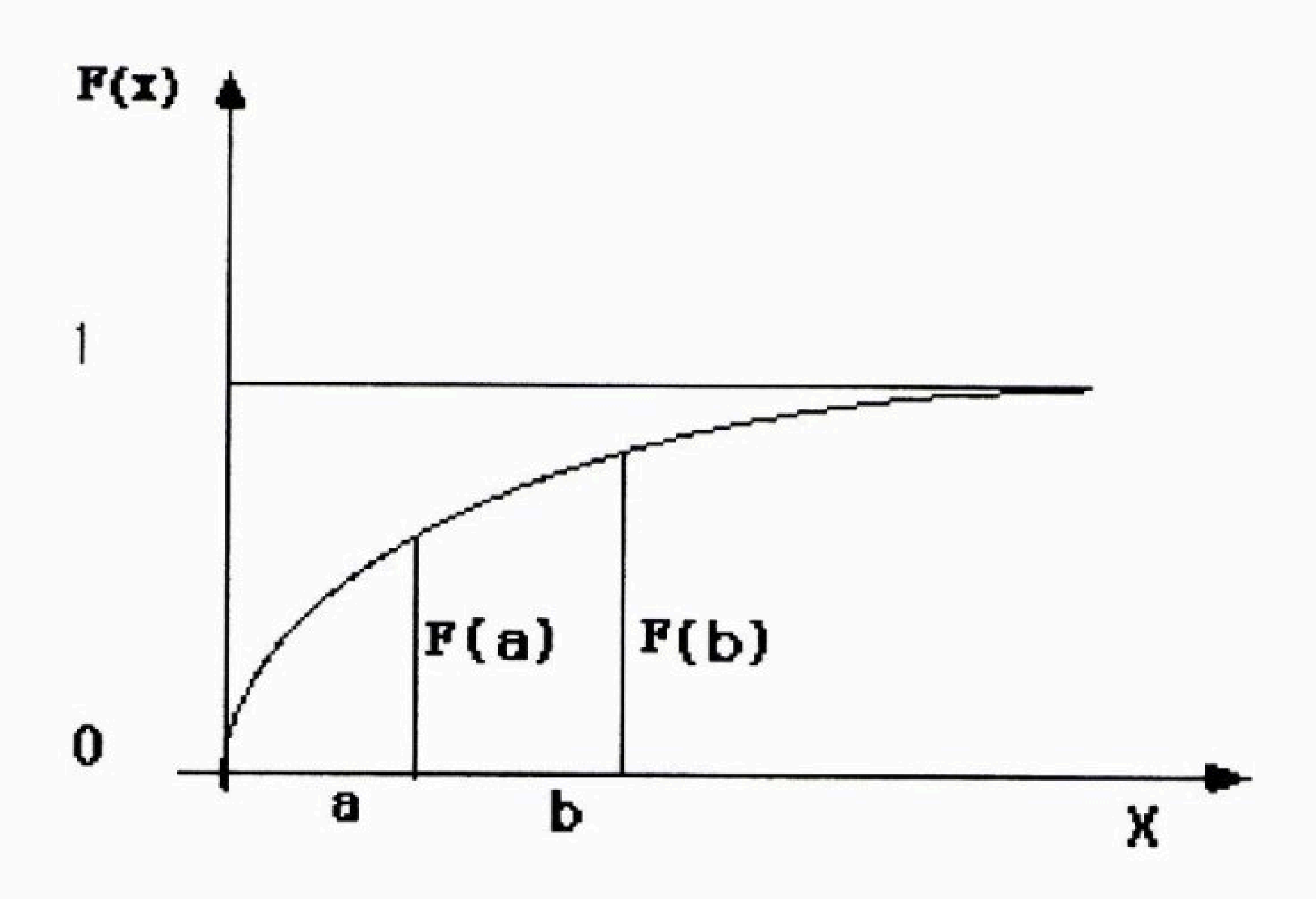
يقابـــل دالة كتـلة الاحتمـــال للمتغير العشوائي المنفصـل هنا ما يسمى بدالــــة كثافـة الاحتمـال (probability density function) أو اختصارا دالة الكثافة.

دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتصل:

دالة التوزيع (distribution function) للمتغير العشوائي المتصل X ولتكن F(x)، تعطى بالعلاقة الرياضية التالية :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx \quad \forall\, x$$

حيث إن $f(x) \geq 0$ فيمكن تمثيل دالة التوزيع F(x) للمتغير العشوائي المتصل بيانيا بالشكل رقم (٩ ,٣) التالي:



الشكل رقم (٩ ,٣). رسم دالة التوزيع.

يتضح أن دالة التوزيع F(x) ليست سلّمية، وإنما هي دالة مستمرة أو متصلة لكـل النقط x.

تعريف ١ , ٤ , ٣ (المتغير العشوائي المتصل)

يقال إن المتغير العشوائي X متغير متصل إذا كانت دالة توزيعه F(x) مستمرة ويمكن اشتقاقها عند كل النقط ماعدا النقط المعزولة isolated point في المدى المعطى. والآن نعرف دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر.

تعريف ٢ , ٤ , ٣ (دالة كثافة الاحتمال)

إذا كانت مشتقة F(x) موجودة وهي f(x)، عندئذ :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

تسمى f(x) دالة كثافة الاحتمال (probability density function) للمتغير العشوائي المستمر، وتختصر عادة بالرمز (.p.d.f) أو اختصارا دالة كثافة.

خواص دالة كثافة الاحتمال f(x): إذا كان X متغيرًا عشوائيًا مستمرًا أو متصلا له دالة كثافة احتمال f(x) فإنها تحقق الخواص التالية:

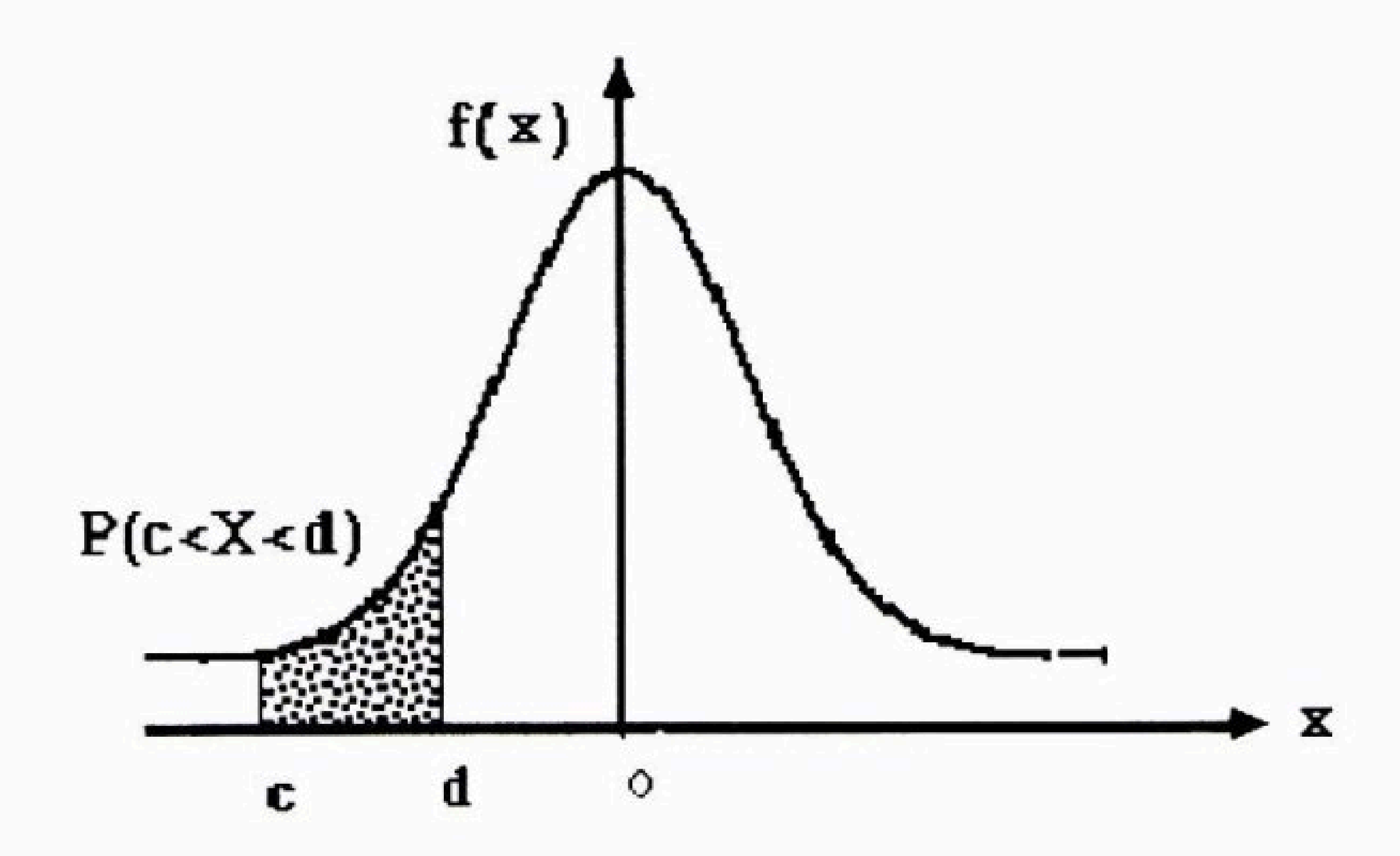
(أ) لكل النقط x نجد أن $f(x) \geq 0$

(ب) لكل النقط x نجد أن $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

(جـ) احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة في الفترة [c , d) , $c < d$ يعطى بالصيغة:

$$P(c < X \leq d) = F(d) - F(c) = \int_{-\infty}^{d} f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx = \int_{c}^{d} f(x)\, dx$$

وهذه تمثل المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ محصورة بين $X = c$ و $X = d$ كما في الشكل رقم (٣ , ١٠) التالي:



الشكل رقم (١٠ , ٣). رسم دالة الكثافة الاحتمالية.

وبعبارة أخرى، يمكن وصف دالة الاحتمال f(x) على أنها دالة موجبة، والتكامل مأخوذ على كل قيم المتغير X الممكنة. و تُمَثّل احتمالات المتغير العشوائي في فترات معينة بمساحات مناسبة تحت المنحنى.

يمكن ملاحظة أن احتمال المتغير العشوائي المتصل عند أي قيمة معينة k يساوي دائما الصفر؛ أي أن:

$$P(X = k) = \int_{-k}^{k} f(x)\, dx = 0$$

وكذلك يمكننا ملاحظة أنه في حالة المتغير العشوائي المتصل X فإن الاحتمالات الأربعة التالية متكافئة.

$$P(c < X \leq d) = P(c < X < d) = P(c \leq X < d) = P(c \leq X \leq d)$$

$$P(c\,,\,d] = P(c\,,\,d) = P[c\,,\,d) = P[c\,,\,d]$$

نظـرية ١ , ٤ , ٣

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلا فإنه يمكن الحصول على دالة التوزيع F(x) من دالة كثافة الاحتمال f(x) والعكس صحيح.

البرهـان:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلا وله دالة كثافة احتمـال f(x)، عندئذ يمكن الحصول على دالة التوزيع F(x) بتكامل الدالة f(x)' أي أن $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.

وعلى الجانب الآخر إذا كانت F(x) مـــعطاة فإن f(x) هـــي مشـتـقة الـدالة F(x)؛ أي أن:

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx}$$

لكل النقط x ، حيث إن F(x) قابلة للاشتقاق.

مـثـال ١ , ٤ , ٣

أوجـد مايلي :

(أ) قيمة k التي تجعل الدالة f(x) دالة كثافة احتمال:

$$f(x) = \begin{cases} kx \ , & 0 \le x \le 2 \\ 0 \ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(ب) احتمال أن تتجاوز قيمتان من قيم العينة الواحد.

(جـ) دالة التوزيع F(x) المرافقة للدالة f(x).

الحـل:

(أ) تسمى الدالة f(x) دالة كثافة احتمال إذا حققت الشرطين التاليين:

$$f(x) \geq 0 \;,\; \forall x \qquad (١)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad (٢)$$

الشرط الأول محقق عندما تكون $k \geq 0$، وسيتحقق الشرط الثاني إذا كان:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

أي أن

$$1 = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{\infty} f(x)\,dx$$

إذن

$$1 = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} kx\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx$$

وعليه فإن

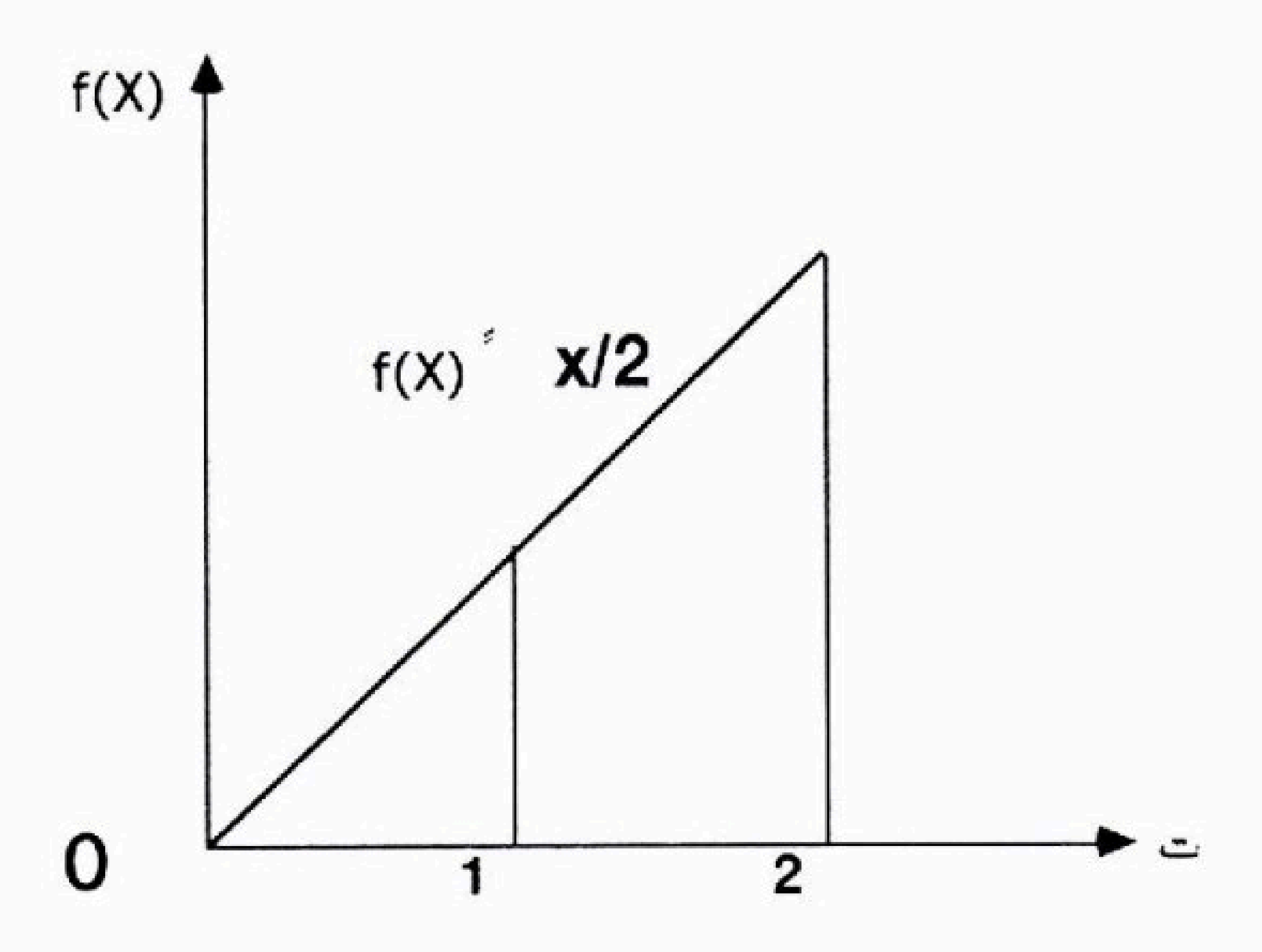
$$1 = 0 + \left[k\,\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 0 = 2k$$

ومن ذلك ينتج أن

$$k = \frac{1}{2}$$

إذن:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \;, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \;, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$



الشكل رقم (١١ ,٣). رسم دالة الكثافة الاحتمالية.

(ب) المساحة تحت المنحنى $f(x) = \frac{x}{2}$ والمحصورة بين $x = 2$ و $x = 1$:

$$P(X > 1) = \int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{4}$$

إذن

$$P\left(\text{قيمتان تتجاوزان } 1\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

(جـ) يمكن الآن إيجاد دالة التوزيع $F(x)$ باستخدام العلاقة التالية :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

لأي x حيث إن :

$-\infty < x < \infty$ فإن $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dx = 0$

إذا كان $0 < x \leq 2$ فنحصل على

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{2} \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$$

وأخيرا إذا كان $x > 2$ فإن

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{2} \frac{x}{2}\, dx + \int_{2}^{x} 0\, dx = 1$$

وبذلك تكون دالة التوزيع $F(x)$ هي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

مثـال ٢ , ٤ , ٣

إذا كانت دالة الكثافة $f(x)$ هي

$$f(x) = \begin{cases} k\, e^{-3x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

فأوجد ما يلي : (أ) قيمة k. (ب) قيمة $P(0.5 < x < 1)$.

الحـل:

(أ) من خواص دالة كثافة الاحتمال نجد أن :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} k\,e^{-3x}\,dx$$

$$= k\int_{0}^{\infty} e^{-3x}\,dx$$

$$= k\left\{\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} e^{-3x}\,dx\right\} = k\left\{\lim_{t\to\infty}\left.\frac{e^{-3x}}{-3}\right|_{0}^{t}\right\}$$

$$= k\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-3t}}{-3} + \frac{1}{3}\right\}$$

$$= k\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{-3\,e^{-3x}} + \lim_{t\to\infty}\frac{1}{3}\right\}$$

$$= \frac{k}{3}$$

ومن ذلك ينتج أن $1 = \frac{k}{3}$ أو $k = 3$.

(ب) نحسب

$$P(0.5 < x \leq 1) = 3\int_{0.5}^{1} e^{-3x}\, dx$$

$$= 3\left[-\frac{1}{3} e^{-3x}\Big|_{0.5}^{1}\right]$$

$$= -\left(e^{-3} - e^{-\frac{3}{0.5}}\right)$$

مثال ٣, ٤, ٣

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلا بدالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = \begin{cases} c\left(4x - 2x^2\right), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد مايلي :

(أ) قمة c .

(ب) $P(X > 1)$.

الحـل:

(أ) من خواص دالة الكثافة الاحتمالية نجد أن:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = c\int_{-\infty}^{\infty} (4x - 2x^2)\, dx$$

$$= c\int_{0}^{2} (4x - 2x^2)\, dx$$

$$= c\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2$$

ومن ذلك نجد أن $c = \frac{3}{8}$.

(ب) $$P(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x)\, dx = \frac{3}{8} \int_1^{2} (4x - 2x^2)\, dx = \frac{1}{2}$$

مثال ٣,٤,٤

إذا كانت مدة صلاحية بطارية راديو تمثل متغيرًا عشوائيًا X له دالة كثافة احتمال

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \le 100 \\ \dfrac{100}{x^2} & , \ x > 100 \end{cases}$$

فما احتمال أن تستبدل بطاريتان من 5 بطاريات في جهاز الراديو بأخريين خلال الـ 150 ساعة الأولى من الاستعمال؟.

الحل:

نفرض أن تبديل أي من الخمس بطاريات $E_i \ , \ i = 1, 2, 3, 4, 5$ في مدة الـ 150 ساعة الأولى من الاستعمال قد تم بطريقة مستقلة. لاحظ أن:

$$P(E_i) = \int_0^{150} f(x)\, dx = 100 \int_{100}^{150} x^{-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

وحيث إن الحوادث E_i مستقلة عن بعضها بناء على الفرضية السابقة، فإننا نحصل على الاحتمال المطلوب كما يلي:

$$\binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

مـثـال ٥ , ٤ , ٣

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلا يمثل الفترة الزمنية، مقيسة بالساعات، التي يعمل فيها جهاز حاسب آلي قبل الإصابة بعطل، وكان للمتغير X دالة الكثافة

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{\frac{-x}{100}} & , \ x \geq 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases}$$

فأوجد مايلي :

(أ) قيمة λ .

(ب) احتمال أن يعمل الحاسب الآلي في الفترة الزمنية بـين 50 و 150 ساعة قبل أن يعطل.

(جـ) احتمال أن يعمل الحاسب الآلي لفترة زمنية أقل من 100 ساعة.

الحـل:

(أ) معروف أن

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lambda \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-x}{100}}\, dx$$

$$= -\lambda\,(100)\, e^{\frac{-x}{100}} \Big|_{0}^{\infty} = 100\,\lambda$$

ومن ذلك نحصل على أن $\lambda = \frac{1}{100}$

(ب) احتمال أن يعمل الحاسب الآلي في الفترة مابين 50 و 150ساعة الأولى هو:

$$P(50 < X < 150) = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{\frac{-x}{100}} dx = - e^{\frac{-x}{100}} \Big|_{50}^{150}$$

$$= - e^{-1/2} - \left(- e^{-3/2}\right) = 0.384$$

(جـ) وبالمثل يكون احتمال أن يعمل الحاسب الآلي لفترة أقل من 100 ساعة:

$$P(X < 100) = \int_{0}^{100} \frac{1}{100} e^{\frac{-x}{100}} dx = - e^{\frac{-x}{100}} \Big|_{0}^{100}$$

$$= 1 - e^{-1} = 0.633$$

مثال ٦, ٤, ٣

تحلق طائرة حربية حاملة للذخيرة بشكل مباشر فوق سيارة شحن لنقل البضائع. إذا سقطت الذخيرة من على بعد 40 قدمًا، فإن الشاحنة سوف تُدمر وحركة المرور عندها سوف تتعطل. إذا كان X يمثل بعد الذخيرة الأفقي عن الشاحنة ويوصف بدالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{100 - x}{5000} , & 0 \le x \le 100 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فما احتمال أن تعرقل الذخيرة حركة سير المرور؟

الحـل:

$$P\left(\text{الذخيرة سوف تعرقل حركة المرور}\right) = P(X \le 40)$$

$$= \int_0^{40} \frac{100 - x}{5000}\, dx = \frac{16}{25}$$

مـثـال ٧ , ٤ , ٣

إذا كانت دالة التوزيع$F(x)$ لمتغير عشوائي متصل معطاة كالتالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{2x^2}{5} & , \quad 0 < x \le 1 \\ -\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(3x - \dfrac{x^2}{2}\right) & , \quad 1 < x \le 2 \\ 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

فأوجد دالة كثافة الاحتمال $f(x)$، ثم أوجد بعد ذلك $P(|X| < 1.5)$.

الحـل:

من النظرية (١ , ٤) وباستخدام العلاقة $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ نحصل على :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{5} & , \quad 0 < x \le 1 \\ \dfrac{2}{5}(3 - x) & , \quad 1 < x \le 2 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$P(|X| < 1.5) = P(-1.5 < x < 1.5)$$

$$= \int_{-\infty}^{-1.5} 0\, dx + \int_{-1.5}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1} \frac{4x}{5}\, dx + \int_{1}^{1.5} \frac{2(3-x)}{5}\, dx$$

$$= 0 + 0 + \left[\frac{2x^2}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{5}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_1^{1.5}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\left\{\left(4.5 - \frac{2.25}{2}\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= 0.4 + 0.35 = 0.75$$

مثال ٨, ٤, ٣

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا بدالة كثافة احتمال:

$$f(x) = \begin{cases} 2x , & 0 < x < 1 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد ما يلي :

(أ) $P\left(X = \frac{1}{2}\right)$

(ب) $P\left(X \le \frac{1}{2}\right)$

(جـ) $P\left(X > \frac{1}{4}\right)$

(د) $P\left(\frac{1}{4} \le X < \frac{1}{2}\right)$

(هـ) $P\left(X \le \frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right)$

الحـل:

من الواضح أن $f(x) \geq 0$، وكذلك $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ ؛ أي أن $f(x)$ دالة كثافة الاحتمال.

(أ) $$P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2x\,dx = 0$$

(ب) $$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2x\,dx$$

$$= 0 + \left[x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

(جـ) $$P\left(X > \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} 2x\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx$$

$$= \left[x^2\right]_{\frac{1}{4}}^{1} + 0 = \frac{15}{16}$$

(د) $$P\left(\frac{1}{4} \leq X < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 2x\,dx$$

$$= \left[x^2\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{16}$$

(هـ) لإيجـاد $P\left(X \le \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right)$ نستخدم تعريف الاحتمال الشرطي فنحصل على:

$$P\left(X \le \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{\int_{1/3}^{1/2} 2x\, dx}{\int_{1/3}^{2/3} 2x\, dx}$$

$$= \frac{\left[x^2\right]_{1/3}^{1/2}}{\left[x^2\right]_{1/3}^{2/3}}$$

$$= \frac{5}{36} \cdot \frac{9}{3} = \frac{5}{12}$$

٥,٣ التوزيعات المشتركة

يسمى توزيع متغيرين أو أكثر من المتغيرات العشوائية توزيعًا مشتركًا (joint distributions)، ويسمى توزيع متغير واحد عادة أحادي التـوزيـع (univariate)، ويسمى التوزيع لمتغيرين عشوائيين بثنائي التوزيع (bivariate)، ويطلق على التوزيع لثلاثة متغيرات بثلاثي التوزيع (trivariate)، ويسمى التوزيع لعدة متغيرات عشوائية بالتوزيع عديد المتغيرات (multivariate).

وفيما يلي نقدم تعريفا لدالة التوزيع المشتركة لمتغيرين عشوائيين.

تعريف ١ , ٥ , ٣

إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين معرفين على فراغ العينـــة S ، فإن الدالـــة F(x,y) تسمى دالة التوزيع للمـتـغـيـريـن X , Y وتعطى بالصيغـة الـريـاضـيـة $F(x\ ,\ y) = P(X \le x\ ,\ Y \le y)$؛ أي أن الدالة F(x,y) تعطي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائـي X قيمة أقل من أو تســاوي x في الوقت الذي يأخذ المتغيـر العشوائي Y قيمة أقل من أو تساوي y . تسمى F(x,y) أحيانًا توزيعًا مشتركًا للمتغيرين العشوائيين X , Y أو دالة توزيعهما المشتركة.

تحقق دالة التوزيع المشترك F(x,y) نفس خواص دالة التوزيع لمتغير واحد. ومن هذه الخصائص مايلي:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x\ ,\ y) = F(\infty\ ,\ \infty) = 1 \quad (\text{أ})$$

$$\lim_{y \to -\infty} F(x\ ,\ y) = F(x\ ,\ -\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x\ ,\ y) = F(-\infty\ ,\ y) = 0$$

(ب) $F(x\ ,\ y)$ دالة تزايدية في x , y ومتصلة من جهة اليمين.

(جـ) إذا كان $x_1 < x_2 \quad , \quad y_1 < y_2$ فإن:

$$\begin{aligned} P(x_1 \le X \le x_2\ ,\ y_1 \le Y \le y_2) &= P(X < x_2\ ,\ Y < y_2) - P(X < x_2\ ,\ Y < y_1) \\ &\quad - P(X < x_1\ ,\ Y < y_2) + P(X < x_1\ ,\ Y < y_1) \\ &= F(x_2\ ,\ y_2) - F(x_2\ ,\ y_1) - F(x_1\ ,\ y_2) + F(x_1\ ,\ y_1) \ge 0 \end{aligned}$$

مـثـال ١ , ٥ , ٣

في تجربة رمي زهرتي نرد، يمكن كتابة فراغ العينة S بالطريقة التالية:

$$S = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{pmatrix}$$

ومن ذلك يمكن إيجاد دالة التوزيع المشتركة $F(x,y)$ لأي زوج مرتب (x,y) في فراغ العينة S؛ فمثلا للزوج المرتب $(2,3)$ نجد أن :

$$\begin{aligned} F(2\,,\,3) &= P(X \le 2\ ,\ Y \le 3) \\ &= P(1,1) + P(1,2) + P(1,3) + P(2,1) + P(2,2) + P(2,3) \end{aligned}$$

وحيث أن لكل نقطة عينة في S نفس فرصة الظهور، أي أن $P(x\,,\,y) = \frac{1}{36}$

ويكون $F(2\,,\,3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

وبالمثل يمكننا إيجاد $P(2 \le X \le 3\ ,\ 1 \le Y \le 2)$ كما يلي :

$$\begin{aligned} P(2 \le X \le 3\ ,\ 1 \le Y \le 2) &= P(2,1) + P(2,2) + P(3,1) + P(3,2) \\ &= \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

تعريف ٢ , ٥ , ٣ (دالة التوزيع المشتركة لمتغيرين عشوائيين منفصلين)

لأي متغيرين عشوائيين منفصلين X , Y معرفين على فراغ عينة S يمكن تعريف دالة التوزيع المشتركة $F(x,y)$ بالصيغة:

$$F(x\,,\,y) = P(X \le x\ ,\ Y \le y) = \sum_{x=-\infty}^{x} \sum_{y=-\infty}^{y} f(x\,,\,y)$$

حيث إن $f(x,y)$ دالة الثقل الاحتمالية المشتركة للمتغيرين المنفصلين.

تعريف ٣,٥,٣ (دالة التوزيع المشتركة لمتغيرين عشوائيين متصلين)

لأي متغيرين عشوائيين متصلين X , Y معرفين على فراغ عينة S، وكانت دالة الكثافة $f(x,y)$ موجبة فإن دالة التوزيع المشتركة للمتغيرين X , Y هي $F(x,y)$ وتعرف كما يلي :

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\ dx\ dy$$ لأي عددين حقيقيين x, y

نسمي المتغيرين X , Y في هذه الحالة بالمتغيرين المتصلين المشتركين، وتسمى الدالة $f(x,y)$ دالة كثافة الاحتمال المشتركة التي سنتعرض لها بعد قليل.

تعريف ٣,٥,٤

نفرض أن X , Y متغيران عشوائيان منفصلان معرفان على فراغ العينة S في تجربة ما. إذا كان X يأخذ القيم $x_1, x_2,...., x_m$ وكان Y يأخذ القيم $y_1, y_2,...., y_n$ فإن احتمال أن المتغير العشوائي x قيمة x_i ويأخذ المتغير العشوائي Y قيمة y_j هي (f_{xi} , y_j) أو P_{ij}، ويعطى بالصيغة الرياضية:

$$f(x_i , y_j) = P\,[X = x_i , Y = y_j] , i = 1, 2, ..., m , j = 1, 2, ..., n$$

تسمى (f_{xi} , y_j) أو P_{ij} في هذه الحالة بدالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين العشوائيين المنفصلين X , Y .

تعريف ٣,٥,٥

إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين منفصلين معرفين على فراغ العينة S، فإن دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X , Y تعطى بالعلاقة:

$$f(x , y) = P[X = x \ , \ Y = y]$$

كما هو الحال في التوزيع الاحتمالي لمتغير واحد، فإن التوزيع الاحتمالي المشترك (الاحتمال الثنائي) لمتغيرين يحتوي على كل الأزواج المرتبة (x_i , y_j) واحتمالاتها المقابلة $f(x_i , y_j)$ يمكن عرضه بالجدول التالي:

Y \ X	y_1	y_2	...	y_j	...	y_n	$P(X=x_i)$
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	...	$f(x_1,y_j)$	...	$f(x_1,y_n)$	$g(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	...	$f(x_2,y_j)$	...	$f(x_2,y_n)$	$g(x_2)$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	$f(x_i,y_1)$	$f(x_i,y_2)$	...	$f(x_i,y_j)$	...	$f(x_i,y_n)$	$g(x_i)$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	$f(x_m,y_1)$	$f(x_m,y_2)$	...	$f(x_m,y_j)$	...	$f(x_m,y_n)$	$g(x_m)$
$P(Y=y_i)$	$h(y_1)$	$h(y_2)$	...	$h(y_j)$	...	$h(y_n)$	1

يمكن كذلك تمثيل التوزيع الاحتمالي المشترك لمتغيرين رياضيّا في صورة صيغة أو علاقة رياضية للدالة $f(x , y)$.

دالة الاحتمال المشتركة $f(x , y)$ لمتغيرين منفصلين تحقق الخاصيتين التاليتين:

(أ) لكل الأزواج المرتبة (x_i , y_j) حيث $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ نجد أن $f(x_i , y_j) > 0$.

(ب) $\sum_i \sum_j f(x_i , y_j) = 1$.

والآن نعرف دالة الاحتمال المشتركة لمتغيرين عشوائيين متصلين، ثم نورد بعض الأمثلة عليها.

تعريف ٣,٥,٦

دالة الاحتمال المشتركة لمتغيرين عشوائيين متصلين هي الدالة التكاملية $f(x , y)$ التي تحقق الخواص التالية:

(أ) لكل الأزواج المرتبة (x , y) نجد أن $f(x , y) > 0$.

(ب) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x , y)\, dx\, dy = 1$.

$$P(a \le X \le b \ , \ c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f(x\ ,\ y)\, dx\, dy \qquad (جـ)$$

يمكن ملاحظة أن دالة التوزيع المشتركة $F(x\ ,\ y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x\ ,\ y)\, dx\, dy$ توصف بأنها دالة مستمرة وتفاضلية؛ أي يمكن اشتقاقها عند كل النقاط ماعدا النقاط المعزولة. تسمى مشتقة دالة التوزيع بدالة كثافة الاحتمال المشتركة؛ أي أن

$$\frac{\partial^2 F(x\ ,\ y)}{\partial x\, \partial y} = f(x\ ,\ y).$$

مثال ٣,٥,٢

يوجد في مركز الحاسب الآلي نوعان من الأجهزة العاطلة؛ أي جهاز معيب من النوع A وجهاز آخر معيب من النوع B. اختير جهاز بطريقة عشوائية وبناء على ذلك عرفنا المتغيرين العشوائيين X , Y كما يلي :

$$X = \begin{cases} 1\ , & \text{الجهاز من النوع } A \\ 0\ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases} \quad , \quad Y = \begin{cases} 1\ , & \text{الجهاز من النوع } B \\ 0\ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X , Y ممثلة بالجدول الاحتمالي التالي :

Y \ X	0	1
0	p_1	$p_3 - p_1$
1	$p_2 - p_1$	$1 + p_1 - p_2 - p_3$

فأوجد ما يلي :

(أ) دالة التوزيع المشتركة $F(x\ ,\ y)$.

(ب) الاحتمالات: (الجهازان أحدهما معيب من نوع P (A ،
(الجهازان سليمان) P.

الحـل:

(أ) باستخدام تعريف دالة التوزيع المشتركة

$$f(x\ ,\ y) = P(X \leq x\ \ ,\ \ Y \leq y) = \sum_{i} \sum_{j} f(x\ ,\ y)$$

يمكن بناء دالة التوزيع المشتركة التراكمية $F(x , y)$ كما يلي :

عندما $x < 0\ ,\ y < 0$ نجد أن $F(x , y) = 0$.

عندما $x \leq 0\ ,\ y < 1$ نجد أن $F(x , y) = p_1$.

عندما $0 \leq x < 1\ ,\ y \geq 1$ نجد أن $F(x , y) = p_2$.

عندما $x \geq 1\ ,\ 0 \leq y < 1$ نجد أن $F(x , y) = p_3$.

عندما $x \geq 1\ ,\ y \geq 1$ نجد أن $F(x , y) = 1$.

الآن يمكن كتابة دالة التوزيع المشتركة $F(x , y)$ كما يلي:

$$F(x\ ,\ y) = \begin{cases} 0\ , & x < 0\ , & y < 0 \\ p_1\ , & 0 \leq x < 1\ , & 0 \leq y < 1 \\ p_2\ , & 0 \leq x < 1\ , & y \geq 1 \\ p_3\ , & x \geq 1\ , & 0 \leq y < 1 \\ 1\ , & x \geq 1\ , & y \geq 1 \end{cases}$$

(ب) من الجدول الاحتمالي يمكن إيجاد قيمة الاحتمالات المطلوبة :

P(الجهازان سليمان) = $P(x=0\ ,\ y=0) = P(0,0) = P_1$

P(أحد الجهازين عاطل من نوع A) = $P(x=1\ ,\ y=0) = P(1,0) = P_3 - P_1$

مثـال ٣,٥,٣

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x , y)$ لمتغيرين متصلـين X , Y معطاة كالتالي:

$$f(x , y) = \begin{cases} x + y \; , & 0 < x \; , \; y < 1 \\ 0 \; , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد دالة التوزيع المشتركة.

الحـل:

باستخدام تعريف دالة التوزيع المشتركة لمتغيرين متصلين X , Y :

$$F(x , y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x , y) \, dx \, dy$$

يمكن بناء دالة التوزيع المشتركة $F(x , y)$ كما يلي :

عندما $x \le 0 , y \le 0$ فإن: $F(x , y) = 0$.

عندما تكون $x > 0 , y < 1$ فإن:

$$F(x , y) = \int_{0}^{y} \int_{0}^{x} (s + t) \, ds \, dt = \frac{x^2 y}{2} + \frac{x y^2}{2}$$

$$= \frac{x y^2 + y x^2}{2} = \frac{xy}{2} (x + y)$$

عندما تكون $x \;\; 1 , 0 < y < 1$ فإن:

$$F(x , y) = \int_{0}^{y} \int_{0}^{x} (s + t) \, ds \, dt = \int_{0}^{y} \int_{0}^{1} (s + t) \, ds \, dt$$

$$= \int_{0}^{y} \left(\frac{1}{2} + t \right) dt = \frac{y + y^2}{2}$$

عندما تكون $0 < x < 1 , y \ge 1$ فإن:

$$F(x\ ,\ y)\ =\ \int_0^x \int_0^1 (s+t)\ ds\ dt$$

$$=\ \frac{x+x^2}{2}$$

عندما تكون $x \geq 1\ ,\ y \geq 1$ فإن

$$F(x\ ,\ y)\ =\ \int_0^1 \int_0^1 (s+t)\ ds\ dt$$

$$=\ 1$$

يمكن تلخيص دالة التوزيع المشتركة للمتغيرين المتصلين $X\ ,\ Y$ كالتالي :

$$F(x\ ,\ y) = \begin{cases} 0 & ,\quad x \leq 0 \quad ,\ y \leq 0 \\ \dfrac{x^2y + xy^2}{2} & ,\quad 0 < x \quad ,\ y < 1 \\ \dfrac{y+y^2}{2} & ,\ 0 < y < 1\ ,\ x \geq 1 \\ \dfrac{x+x^2}{2} & ,\ 0 < x < 1\ ,\ y \geq 1 \\ 1 & ,\quad x \geq 1 \quad ,\ y \geq 1 \end{cases}$$

مثال ٣,٥,٤

إذا كانت الدالة التالية تمثل توزيع بعض الجزئيات الشعاعية :

$$f(y_1\ ,\ y_2) = \begin{cases} 1\ ,\ 0 \leq y_1 \leq 1\ ,\ 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0\ , \qquad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجـد :

(أ) $F(0.2\ ,\ 0.4)$.

(ب) $P(0.1 \le y_1 \le 0.3\ \ ,\ \ 0 \le y_2 \le 0.5)$.

الحـل:

(أ) من تعريف دالة التوزيع المشتركة نحصل على :

$$F(0.2\ ,0.4\ ) = \int_{-\infty}^{0.4} \int_{-\infty}^{0.2} f(y_1\ ,\ y_2)\, dy_1\, dy_2$$

$$= \int_{0}^{0.4} \int_{0}^{0.2} 1\, dy_1\, dy_2$$

$$= \int_{0}^{0.4} y_1\Big|_0^{0.2}\, dy_2 = 0.08$$

(ب)

$$P(0.1 \le y_1 \le 0.3\ ,0 \le\ y_2 \le 0.5\ ) = \int_{0}^{0.5} \int_{0}^{0.3} f(y_1\ ,\ y_2)\, dy_1\, dy_2$$

$$= \int_{0}^{0.5} \int_{0}^{0.3} 1\, dy_1\, dy_2$$

$$= 0.1$$

مـثـال ٣,٥,٥

تحتوي علبة دواء على 3 حبات أسبرين،و 2 تايلنول، و4 بانادول. يمثل X

عدد حبات الأسبرين ويمثل Y عدد حبات التايلنول. إذا سحبت حبتان من العلبة بطريقة عشوائية، فأوجد دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X , Y.

الحـل:

نلاحظ أن فراغ العينة S يحتوي على $36 = \binom{9}{2}$ نقطة عينة.

من الواضح أن يأخذ المتغير العشوائـي X القيم 0, 1, 2، وكذلك يأخذ المتغيـر العشوائي Y القيم 0, 1, 2، وتأخذ (X , Y) القيم (0,2) , (1,1) , (1,0) , (0,1) , (0,0) , (2,0) ..

الآن نريد إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة f(x , y) لكل قيمة (x , y).

فمثلا لإيجاد الاحتمال المقابل للزوج المرتب (x , y) = (0 , 0) نجد أن:

$$f(0\ ,\ 0) = P(X = 0\ \ ,\ \ Y = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6}$$

حيث إن الحادثة $\{ X = 0\ ,\ Y = 0 \}$: عدم الحصول على أسبرين وتايلنول.

ولإيجاد احتمال الزوج المرتب (x , y) = (1 , 0) نحصل على :

$$f(1\ ,\ 0) = P(X = 1\ \ ,\ \ Y = 0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{3}$$

حيث إن الحادثة $\{ X = 1\ ,\ Y = 0 \}$: إحدى الحبتين أسبرين والأخرى بانادول.

وهكذا باتباع نفس الطريقة يمكن استخلاص الجدول الاحتمالي التالي:

Y \ X	0	1	2
0	1/6	1/3	1/12
1	2/9	1/6	0
2	1/36	0	0

وبصورة عامة يمكن التعبير عن الدالة $f(x , y)$ بالصيغة الرياضية :

$$f(x , y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{4}{2-(x+y)}}{\binom{9}{2}} \quad , \quad x , y = 0, 1, 2 \quad , \quad 0 \le x + y \le 2$$

تسمى $f(x , y)$ دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X , Y .

يمكن أيضا إيجاد قيمة دالة التوزيع المشتركة $F(x , y)$ لكل زوج مرتب (x , y)؛ فمثلا

$$F(1 , 1) = P(X \le 1 , Y \le 1) = f(0 , 0) + f(0 , 1) + f(1 , 0) + f(1 , 1)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{8}{9}$$

وبالطريقة نفسها يمكن إيجاد دالة التوزيع المشتركة لكل زوج مرتب (x , y) .

مثال ٦ , ٥ , ٣

يحتوي صندوق على 3 كرات سوداء، وكرتين حمراوين ،و 3 كرات خضراء . سحبت كرتان بطريقة عشوائية من الصندوق. إذا كان X يرمز لعدد الكرات السوداء، Y يرمز لعدد الكرات الحمراء، فأوجد :

(أ) دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x , y)$.

(ب) الاحتمال $P(X + Y \le 1)$.

الحل :

نلاحظ أن فراغ العينة S في هذه التجربة يحتوي على $\binom{8}{2}=28$ نقطة عينة، ومن الواضح أن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي 0, 1, 2، والقيم الممكنة للمتغير العشوائي Y هي 0, 1, 2، ويأخذ الزوج المرتب (x,y) القيم (2,0) , (0,2) , (1,1) , (1,0) , (0,1) , (0,0)، والآن نريد إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة f(x , y) لكل زوج مرتب (x , y)؛ فمثلا لإيجاد احتمال الزوج المرتب (0,0) نجد أن $f(0,0) = P(X = 0 \ , \ Y = 0)$ حيث إن الحادثة $\{X = 0 \ , \ Y = 0\}$ هي عدم وجود كرة سوداء وعدم وجود كرة حمراء، وهذا يعني ظهور كرتين خضراوين نتيجة للسحب.

تحتوي هذه الحادثة على $\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2} = 3$ نقطة عينة، ومن ذلك نحصل على

$$f(0,0) = P(X = 0 \ , \ Y = 0) = \frac{3}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28} .$$

وبالمثل للزوج المرتب (0,1) نكتب

$$f(0,1) = P(X = 0, Y = 1) = P(\text{عدم وجود كرة سوداء، وكرة حمراء، عدم وجود كرة خضراء})$$

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{28} = \frac{6}{28}$$

وبالمثل أيضًا للزوج المرتب (1,1)، نكتب

$$f(1,1) = P(X = 1, Y = 1) = P(\text{كرة سوداء، وكرة حمراء، عدم وجود كرة خضراء})$$

$$= \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{28} = \frac{6}{28}$$

وكذلك نكتب

$$f(2,0) = P(X = 2, Y = 0) = P(\text{كرتين سوداويتين فقط})$$

$$= \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{28} = \frac{3}{28}$$

بنفس الطريقة يمكن إيجاد احتمالات القيم المتبقية، ومن ذلك يمكننا استنتاج دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x, y)$ كما هي مبينة في الجدول الاحتمالي التالي:

(x,y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(0,2)	(2,0)
f(x,y)	3/28	6/28	9/28	6/28	1/28	3/28

يمكننا أيضا وضع دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x, y)$ في جدول احتمالي آخر يأخذ الشكل التالي:

X \ Y	0	1	2	$P(X = x_i)$
0	3/28	6/28	1/28	10/28
1	9/28	6/28	0	15/28
2	3/28	0	0	3/28
$P(Y = y_i)$	15/28	12/28	1/28	1

يمكن تمثيل دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x, y)$ رياضيا وذلك بإيجاد صيغة رياضية

$$f(x, y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{4}{2-(x+y)}}{\binom{9}{2}}, \quad x, y = 0, 1, 2, \quad 0 \le x+y \le 2$$

(ب) لإيجاد قيمة الاحتمال $P(X + Y \le 1)$ ، قد نلاحظ أن $x + y \le 1$ لكل الأزواج المرتبة $(0,0), (0,1), (1,0)$ فعليه يكون:

$$P(X + Y \le 1) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0)$$

$$= \frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{9}{28}$$

$$= \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

مثال ٣,٥,٧

إذا كانت الدالة المشتركة لمتغيرين معطاة كما يلي:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6 - x - y}{8} & , \quad 0 \le x \le 2 \ , \ 2 \le y \le 4 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(أ) اختبر أن الدالة $f(x, y)$ دالة كثافة احتمال مشتركة.

(ب) أوجد الاحتمالات التالية: $P(X + Y < 3)$, $P\left(X \le \frac{2}{3} , Y \le \frac{5}{2}\right)$.

الحـل:

من المعروف أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x, y)$ يجب أن تحقق الخواص التالية:

$$f(x, y) \ge 0 \qquad (١)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1 \qquad (٢)$$

(أ) من الواضح أن $f(x, y) \ge 0$ لكل النقاط x, y وكذلك

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{8}\int_{0}^{2}\int_{2}^{4} (6 - x - y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_{0}^{2}\left[6y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{2}^{4} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_{0}^{2}(6 - 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[6x - x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{8}\left[12 - 4\right] = 1$$

وبذلك نستطيع القول إن $f(x, y)$ تحقق خواص دالة كثافة الاحتمال المشتركة.

(ب)

$$P\left(X \le \frac{3}{2},\ Y \le \frac{5}{2}\right) = \int_{x=0}^{\frac{3}{2}}\int_{y=0}^{\frac{5}{2}} \frac{6 - x - y}{8}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_{0}^{3/2}\left[6y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{2}^{5/2} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_{0}^{3/2}\left(\frac{15}{8} - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{64}\left[15x - 2x^2\right]_{0}^{3/2}$$

$$= \frac{9}{32}$$

(حيث إن $x+y \le 3$ فإن $y = 3-x$)

$$P(X+Y<3) = \int_0^1 \int_2^{3-x} \frac{6-x-y}{8}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^1 \left[6y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_2^{3-x} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 4x + \frac{7}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{7x}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{5}{24}$$

مثال ٨ , ٥ , ٣

إذا كانت دالة الكثافة المشتركة لمتغيرين عشوائيين X , Y تعطى بالصيغة الرياضية التالية :

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} \;, & 0<x<\infty \;,\; 0<y<\infty \\ 0 \;, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد الاحتمالات التالية :

(أ) $P(X>1\,,\,Y<1)$.

(ب) $P(X<Y)$.

(جـ) $P(X<a)$.

الحـل:

(أ)

$$P(X > 1 \,,\, Y < 1) = \int_0^1 \int_1^\infty 2\, e^{-x}\, e^{-2y}\; dx\, dy$$

$$= \int_0^1 2\, e^{-2y} \left[-\, e^{-x} \right]_1^\infty dy$$

$$= e^{-1} \left(1 - e^{-2} \right)$$

(ب)

$$P(X < Y) = \iint_{x < y} 2\, e^{-x}\, e^{-2y}\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_0^y 2\, e^{-x}\, e^{-2y}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty 2\, e^{-2y} \left(1 - e^{-y} \right) dy = \int_0^\infty 2\, e^{-2y}\, dy - \int_0^\infty 2\, e^{-3y}\, dy = \frac{1}{3}$$

(جـ)

$$P(X < a) = \int_0^a \int_0^\infty 2\, e^{-x}\, e^{-2y}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^a e^{-x}\, dx = 1 - e^{-a}$$

مـثـال ٩ , ٥ , ٣

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرين X , Y معطاة كالتالي :

$$f(x\,,\,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & ,\; 0 < x < \infty \,,\, 0 < y < \infty \\ 0 & ,\; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X/Y .

الحـل:

نوجد أولا دالة التوزيع للمتغير العشوائي X/Y كما يلي :

$$F_{X/Y}(a) = P\left(\frac{X}{Y} \le a\right) = \iint_{\frac{x}{y} \le a} e^{-(x+y)}\ dx\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{ay} e^{-(x+y)}\ dx\, dy = \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-ay}\right) e^{-y}\ dy$$

$$= \left[-e^{-y} + \frac{e^{-(a+1)y}}{a+1}\right]_0^{\infty} = 1 - \frac{1}{a+1}$$

باشتقاق دالة التوزيع $F(a)$ نحصل على دالة الكثافة للمتغير العشوائي X/Y :

$$f_{\frac{X}{Y}}(a) = \frac{1}{(1+a)^2}\ ,\ 0 < a < \infty$$

ملاحظة ١,٥,٣ يمكن تعميم دالة التوزيع ودالة الاحتمال المشتركة لعـدد n من المتغيرات كما يلي :

(أ) إذا كان لدينا عدد من المتغيرات العشوائية المنفصلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ فإن دالة الاحتمال المشتركة لهذه المتغيرات تعرّف بالصيغة

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

وتعطى دالة التوزيع المشتركة كما يلي :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$$

$$= \sum_{t_1 \le x_1} \sum_{t_2 \le x_2} \cdots \sum_{t_n \le x_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

(ب) يمكن تعريف دالة التوزيع المشتركة $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ لعدد n من المتغيرات العشوائية المتصلة كالتالي:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

يمكن كذلك إيجاد دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات المتصلة كما يلي:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$

مثال ٣,٥,١٠

في تجربة رمي قطعة معدنية عدد n من المرات، كان المتغير العشوائي X_1 يمثل الحصول على صورة H في المرة الأولى، والمتغير العشوائي X_2 يمثل الحصول على صورة H في المرة الثانية، وهكذا يمثل المتغير العشوائي X_n الحصول على صورة H في المرة n. ما دالة كثافة الاحتمال المشتركة المعرفة على الفراغ الاحتمالي لهذه التجربة؟

الحل:

من تعريف دالة الاحتمال المشتركة لعدد n من المتغيرات العشوائية المنفصلة نحصل على:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

حيث إن احتمال ظهور الصورة في القطعة المعدنية المتزنة هو $\frac{1}{2}$.

مثال ١١ , ٥ , ٣

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائية المتصلة X , Y , Z معطاة كما يلي :

$$f(x , y , z) = \begin{cases} e^{-(x+y+z)} & , \ 0 < x < \infty \ , \ 0 < y < \infty \ , \ 0 < z < \infty \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد دالة التوزيع المشتركة للمتغيرات X , Y , Z .

الحل:

دالة التوزيع المشتركة للمتغيرات X , Y , Z هي

$$F(x,y,z) = P(X < x \ , Y < y \ , Z < z \ )$$

$$\begin{aligned} F(x , y , z) &= P(X \le x \ , Y \le y \ , Z \le z) \\ &= \int_0^x \int_0^y \int_0^z e^{-u-v-w} \, du \, dv \, dw \\ &= \left(1 - e^{-x}\right)\left(1 - e^{-y}\right)\left(1 - e^{-z}\right) \ , \ 0 \le x, y, z < \infty \end{aligned}$$

أي أنه :

$$F(x , y , z) = \begin{cases} \left(1 - e^{-x}\right)\left(1 - e^{-y}\right)\left(1 - e^{-z}\right) & , \ 0 \le x \ , y \ , z < \infty \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

من الملاحظ أنه يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة f(x , y , z) كما يلي :

$$f(x , y , z) = \frac{\partial^3 F(x , y , z)}{\partial x \, \partial y \, \partial z}$$

٦ , ٣ التوزيع الهامشي

يمكننا الحصول على دالة الاحتمال الخاصة بالمتغير العشوائي X، ودالة الاحتمال الخاصة بالمتغير العشوائي Y من f(x, y) وتسمى هذه الدوال «دوال احتمال هامشية» للمتغيرين العشوائيين X , Y ويرمز لهما بالرمز f(x) , f(y) على التوالي.

حصلنا في المثال (٥ , ٥ , ٣) (مثال علبة الدواء) على الجدول التالي الذي يمثل دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X , Y :

Y \ X	0	1	2	f(y)
0	1/6	1/3	1/12	7/12
1	2/9	1/6	0	7/18
2	1/36	0	0	1/36
f(x)	5/12	1/2	1/12	–

نفرض أن لدينا دالة جديدة f(x)، وباستخدام الجدول الاحتمالي السابق يمكن تعريفها عند كل قيم X الممكنة 2 , 1 , 0 كما يلي:

$$f(x=0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = 1/6 + 2/9 + 1/36 = 5/12$$

$$f(x=1) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = 1/3 + 1/6 + 0 = 1/2$$

$$f(x=2) = f(2,0) + f(2,1) + f(2,2) = 1/2 + 0 + 0 = 1/2$$

وباختصار يمكن تعريف f(x) كما يلي:

$$f(x) = f(x,0) + f(x,1) + f(x,2) = \sum_{y=0}^{2} f(x,y)$$

وبالمثل نفرض أن لدينا دالة أخرى هـي f(y) ويمكن تعريفها لكل قـيـم Y الممكنة 0, 1, 2 كالتالي :

$$f(y=0)=f(0,0)+f(1,0)+f(2,0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

$$f(y=1)=f(0,1)+f(1,1)+f(2,1)=\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+0=\frac{7}{18}$$

$$f(y=2)=f(0,2)+f(1,2)+f(2,2)=\frac{1}{36}+0+0=\frac{1}{36}$$

أي أن الدالة f(y) تعرّف كما يلي :

$$f(y)=f(0,y)+f(1,y)+f(2,y)=\sum_{x=0}^{2}f(x,y)$$

في هذه الحالة تسمى الدالة f(x) دالة احتمال هامشية للمتغير العشوائي X، وتسمى الدالة f(y) بدالة احتمال هامشية للمتغير العشوائي Y .
من المثال التوضيحي السابق يمكن إعطاء التعريف التالي :

تـعـريـف ١ , ٦ , ٣ (دوال الاحتمال الهامشية)

إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين منفصلين، ودالة الاحتمال المشتركة لهما f(x, y) فإن دوال الاحتمال الهامشية للمتغيرين العشوائيين X , Y تعرّف على التوالي كمايلي :

$$f(x)=\sum_{y=-\infty}^{\infty}f(x,y)$$

$$f(y)=\sum_{x=-\infty}^{\infty}f(x,y)$$

وفي حالة كـون X , Y متغيرين عشوائيين متصلين، ودالة الاحتمال المـشـتـركـة $f(x, y)$ فإن دوال الاحتمال الهامشية للمتغيرين X , Y تعرّف على الترتيب كما يلي:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x , y)\, dy$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x , y)\, dx$$

مـثـال ١ , ٦ , ٣

في تجربة رمي زهري نرد، كانت Y_1 تمثل عدد النقاط الظاهرة على الوجه العلوي لقطعة النرد الأولى، وكانـت Y_2 تمثل عدد النقاط الظاهرة على الوجـه العلوي لقطعة النرد الثانية. أوجد دوال الاحتمال الهامشية $f(y_1)$, $f(y_2)$.

الحـل:

من المعلوم أن فراغ العينة S في هذه التجربة يحتوي على 36 نقطة عينة، وكل نقطة لها نفس فرصة الظهور أو الحدوث. ويكون

$$f(y_1=1) = f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) + f(1,4) + f(1,5) + f(1,6)$$

$$= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+..+\frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

$$f(y_1=2) = f(2,1) + f(2,2) + f(2,3) + f(2,4) + f(2,5) + f(2,6)$$

$$= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+..+\frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

...

$$f(y_1=6) = f(6,1) + f(6,2) + f(6,3) + f(6,4) + f(6,5) + f(6,6)$$

$$= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+..+\frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

أي باختصار يمكن الحصول على $f(y_2)$ كما يلي :

$$f(y_2) = \sum_{y_1 = 1}^{6} f(y_1 , y_2)$$

مثال ٣,٦,٢

إذا كانت دالة الكثافة $f(x, y)$ معرّفة كالتالي :

$$f(x , y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) , & 0 < x , y < 1 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد دالة الكثافة الهامشية للمتغيرين X , Y .

الحل:

من تعريف دالة الاحتمال الهامشية نحصل على :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x , y)\, dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (x + 2y)\, dy$$

$$= \frac{2}{3}(xy + y^2)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(x + 1)$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x , y)\, dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (x + 2y)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + 2xy\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + 2y\right)$$

مثال ٣,٦,٣

أوجد، في المثال ٣,٥,٥ الدوال الهامشية للمتغيرين X , Y .

الحـل:

من تعريف دالة الاحتمال الهامشية نجد أن دوال الاحتمال الهامشية للمتغيرين X , Y هي على الترتيب:

$$f(x) = \sum_{y=0}^{2} f(x,y)$$

$$f(y) = \sum_{x=0}^{2} f(x,y)$$

أي أنه يمكن كتابة دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X كما يلي :

$$f(x=0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = \frac{10}{28}$$

$$f(x=1) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = \frac{15}{28}$$

$$f(x=2) = f(2,0) + f(2,1) + f(2,2) = \frac{3}{28}$$

وكذلك يمكن كتابة دالة الاحتمال الهامشية للمتغير Y كالتالي :

$$f(y=0) = f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) = \frac{15}{28}$$

$$f(y=1) = f(0,1) + f(1,1) + f(2,1) = \frac{12}{28}$$

$$f(y=2) = f(0,2) + f(1,2) + f(2,2) = \frac{1}{28}$$

يلاحظ أنه يمكن الحصول على دالة الاحتمال الهامشيــة f(x) بجمع الصفوف في

جدول التوزيع الاحتمالي المشترك، وكذلك يمكن الحصول على دالة الاحتمال الهامشية f(y) بجمع الأعمدة في جدول التوزيع الاحتمالي المشترك، ويمكن كتابتها بصورة مستقلة كما يلي:

x	0	1	2
f(x)	10/28	15/28	3/28

y	0	1	2
f(y)	15/28	12/28	1/28

مثال ٤, ٦, ٣

أوجد في المثال ٧, ٥, ٣ دوال الاحتمال الهامشية للمتغيرين العشوائيين X, Y .

الحل:

من تعريف دالة الاحتمال الهامشية نجد أن:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \qquad , -\infty < x < \infty$$

$$= \frac{1}{8}\int_{2}^{4}(6 - x - y)\, dy \quad , 0 \le x \le 2$$

$$= \frac{1}{8}\left[6y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_2^4 \quad , 0 \le x \le 2$$

$$= \frac{1}{4}(3 - x) \qquad , 0 \le x \le 2$$

$$= 0 \qquad , x < 0 \ , \ x \ge 2$$

وبالمثل يمكن إيجاد دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y كما يلي:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\ ,\ y)\, dx = \frac{1}{8}\int_{0}^{2}(6 - x - y)\, dx \quad , \ 2 \le y \le 4$$

$$= \frac{1}{4}(5 - y) \qquad , \ 2 \le y \le 4$$

$$= 0 \qquad , \ \text{خلاف ذلك}$$

مثـال ٣,٦,٥

يصوب شخص بندقيته نحو هدف معين، وكانت نقطة الهدف أية نقطة $(x\ ,\ y)$ في دائرة نصف قطرهـا r ومركزها $(0\ ,0)$. إذا أمكن وصـف $(X\ ,\ Y)$ بدالـة كثـافة مشتركة $f(x, y)$ معطاة كما يلي:

$$f(x\ ,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\, r^2} & , \ x^2 + y^2 \le r^2 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد دوال الاحتمال الهامشية للمتغيرين X , Y ؛ أي نريد إيجاد الدوال الهامشية $f(x)\ \ f(y)$.

الحـل:

من تعريف دوال الاحتمال الهامشية لمتغير عشوائي نجد أن:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\ ,\ y)\, dy = \int_{x^2 + y^2 \le r^2} \frac{1}{\pi\, r^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi\, r^2}\int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi\, r^2} \quad , \ |x| \le r$$

فعليه يكون

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2} , & |x| \le r \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وبنفس الكيفية يمكن إيجاد دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y كما يلي:

$$f(y) = \int_{x^2 + y^2 \le r^2} f(x , y)\, dx = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{r^2 - y^2}}{\pi r^2} , & |y| \le r \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ملاحظة ١ , ٦ , ٣

يمكن تعميم تعريف التوزيع الهامشي في حالة وجود عدة متغيرات؛ فمثلا إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية منفصلة لها دالة احتمال مشتركة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$؛ فإن دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X_1 هي

$$f(X_1) = \sum_{x_2} \sum_{x_3} ... \sum_{x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

وكذلك إذا أردنا إيجاد دالة الاحتمال الهامشية المشتركة للمتغيرين X_1 , X_2 فإنه يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$f(X_1 , X_2) = \sum_{x_3} \sum_{x_4} ... \sum_{x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

وبالمثل، في حالة ما إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية متصلة يقابلها دالة كثافة احتمال مشتركة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ فإنه يمكن كتابة دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X_1 على الصورة :

$$f(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_2\, dx_3 ... dx_n$$

وكذلك إذا أردنا إيجاد دالة التوزيع الهامشية المشتركة للمتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$، فيمكن كتابتها كما يلي:

$$f(X_1, X_2, X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_3\, dx_4 \ldots dx_{n-1}$$

مـثـال ٦ , ٦ , ٣

إذا كانت لدينا دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات X_1, X_2, X_3 معطاة كالتالي:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 + x_2)\, e^{-x_3} & , \ 0 < x_1 \ , x_2 < 1 \ , \ x_3 > 0 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد مايلي:

(أ) دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغيرين X_1, X_3.

(ب) دالة الكثافة الهامشية للمتغير X_1.

الحـل:

تعرف دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغيرين العشوائيين المتصلين X_1, X_3 كما يلي:

$$f(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_2 = \int_0^1 (x_1 + x_2)\, e^{-x_3}\, dx_2$$

$$= e^{-x_3} \int_0^1 (x_1 + x_2)\, dx_2$$

$$= e^{-x_3} \left(x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = e^{-x_3} \left(x_2 + \frac{1}{2} \right)$$

وبالمثل فإن دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X_1 هي:

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_2\, dx_3$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^1 (x_1 + x_2)\, e^{-x_3}\, dx_2\, dx_3$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x_3} \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) dx_3$$

$$= \lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-x_3} \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) dx_3$$

$$= \lim_{t \to \infty} e^{-x_3} \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^t = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) \lim_{t \to \infty} -e^{-t} + 1$$

$$= x_1 + \frac{1}{2}$$

٣,٧ دوال الاحتمال الشرطية

من قانون الضرب في الاحتمالات، رأينا كيـف يمكن حساب احتمال حاصـل ضـرب حـادثـتين A, B أو تقاطعهما الذي يعبر عنه بالعلاقة الرياضية التالية:

$$P(AB) = P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B \mid A)$$

حيث إن $P(A)$ ترمز لدالة الاحتمال العادية للحدث A، وكذلك ترمز $P(B \mid A)$ لدالة الاحتمال الشرطية للحادثة B بمعلومية الحادثـةA . الآن إذا فرضنا أن لدينا الحادثتين $\{X = x\}$, $\{Y = y\}$ فإنه يمكن تمثيل تقاطعهما (أو حاصل ضربهما)

بواسطة الحادثة الثنائية (x , y) وباستخدام قانون الضرب الاحتمالي، فإن دالة الاحتمال المشتركة لحادثة التقاطع (x , y) تعطى كما يلي:

$$f(x , y) = f(x) \cdot f(y \mid x) = f(y) \cdot f(x \mid y)$$

حيث أن $f(x)$ ترمز لدالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X وكذلك ترمز $f(y)$ لدالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y، و ترمز $f(y \mid x)$ لاحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي Y قيمة معينة y بمعلومية قيمة من المتغير العشوائي X. ترمز $f(x \mid y)$ لاحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة معينة x بمعلومية قيمة من المتغير العشوائي Y. يتضح من دالة الاحتمال المشتركة لحادثة التقاطع، $f(x, y)$ ، أنه يمكن بسهولة إيجاد دالة الاحتمال الشرطية للمتغيرين X , Y كما يلي:

$$f(x \mid y) = \frac{f(x , y)}{f(y)} \qquad \text{أو} \qquad f(y \mid x) = \frac{f(x , y)}{f(x)}$$

والآن يمكننا مما سبق استنباط التعريف التالي:

تعريف ٣,٧,١ (دالة الاحتمال الشرطية لمتغيرين منفصلين)

تعطى دالة الاحتمال الشرطية للمتغير المنفصل X بمعلومية المتغير المنفصل Y (دالة الاحتمال الشرطية المنفصل) بالصيغة:

$$f(x \mid y) = f(X=x \mid Y=y) = \frac{f(X=x , Y=y)}{f(Y = y)} = \frac{f(x , y)}{f(y)}$$

بشرط أن $f(y) > 0$.

تعريف ٣,٧,٢ (دالة الاحتمال الشرطية لمتغيرين متصلين)

إذا كان X , Y متغيرين متصلين، ودالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهما $f(x, y)$، ودالتا الكثافة الهامشية لهما $f(x) , f(y)$ على التوالي، فإن دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية للمتغير X بمعلومية أن $Y = y$ تعطى كما يلي:

$$f(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{f(x\,,\,y)}{f(y)} \;, & f(y) > 0 \\ 0 \;, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وبالمثل تعطى دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير Y بمعلومية أن $X = x$ بالصيغة:

$$f(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{f(x\,,\,y)}{f(x)} \;, & f(x) > 0 \\ 0 \;, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال ١ ,٧ ,٣

أوجد من المثال (٥ ,٦ ,٣) دوال الاحتمال الشرطية $f(x \mid 1)$, $f(0 \mid 1)$.

الحل:

من تعريف دالة الاحتمال الشرطية نحصل على :

$$f(x \mid 1) = f(X{=}x \mid Y{=}1) = \frac{f(X{=}x\,,\,Y{=}1)}{f(Y=1)} = \frac{f(x\,,\,1)}{f(1)}$$

ويكون $x = 0, 1, 2 \;,\; f(x \mid 1) = \dfrac{f(x\,,\,1)}{f(1)}$.

يمكن إيجاد قيمة هذه الدالة عند كل قيم X الممكنة؛ أي 0, 1, 2 كما يلي:

$$f(0|1) = \frac{f(0|1)}{f(1)} = \frac{6}{28} \times \frac{28}{12} = \frac{1}{2}$$

$$f(1|1) = \frac{f(1|1)}{f(1)} = \frac{6}{28} \times \frac{28}{12} = \frac{1}{2}$$

$$f(2|1) = \frac{f(2|1)}{f(1)} = 0 \times \frac{28}{12} = 0$$

يمكن كتابة ذلك التوزيع الاحتمالي الشرطي بصورة رياضية أخرى :

$$f(x|1) = \frac{f(x\ ,\ 1)}{f(1)} = \frac{7}{3} f(x\ ,\ 1) \quad , \quad x = 0, 1, 2$$

وكذلك يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي الشرطي في جدول احتمالي كما يلي:

x	0	1	2	
f(x | 1)	0.50	0.50	0.00	1

يمكن إيجاد $f(0|1)$ باستخدام التعريف (١ , ٧ , ٣)

$$f(0|1) = \frac{f(0\ ,\ 1)}{f(1)} = \frac{6}{28} \times \frac{28}{12} = \frac{1}{2}$$

مثال ٢ , ٧ , ٣

أوجد من المثال (٧ , ٥ , ٣) دوال الاحتمال الشرطية $f(y|x)$, $f(x|y)$.

الحـل:

باستخدام التعريف (٣,٧,٢) نحصل على:

$$f(x \mid y) = \frac{f(x\,,\,y)}{f(y)} = \frac{\frac{1}{8}\,(6 - x - y)}{\frac{1}{4}\,(5 - y)} = \frac{6 - x - y}{2(5 - y)}$$

وبالمثل يمكن إيجاد $f(y \mid x)$.

مـثـال ٣,٧,٣

إذا كان لدينا دالة الكثافة المشتركة $f(x\,,\,y)$ معرّفة كما يلي:

$$f(x\,,\,y) = \begin{cases} 4xy\ , & 0 < x\ ,\ y < 1 \\ 0\ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد دالة الكثافة الشرطية للمتغير العشوائي X بمعلومية Y.

الحـل:

لإيجاد المطلوب $f(x \mid y)$ نحسب الدالة الهامشية للمتغير العشوائي Y حيث

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,,\,y)\,dx = \int_0^1 4xy\,dx = 2y$$

الآن باستخدام تعريف دالة الاحتمال الشرطية نحصل على:

$$f(x \mid y) = \frac{f(x\,,\,y)}{f(y)} = \frac{4xy}{2y} = 2x$$

أي أن:

$$f(x \mid y) = \begin{cases} 2x\ , & 0 < x < 1 \\ 0\ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

دالة التوزيع الشرطية لمتغيرين متصلـين: افرض أن لدينا متغيرين متصلـين X , Y ودالة الكثافة المشتركة لهما f(x , y) ونريد إيجاد الاحتمال التالي

$$P(X \le x \mid Y \le y) = F(x \mid y)$$

يسمى هذا الاحتمال بدالة التوزيع الشرطية للمتغير X بمعلومية المتغير Y الذي يأخذ قيمة معينة y. بضرب هذه الدالة في f(y) مع أخذ التكامل نحصل على:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x \mid y)\, f(y)\, dy$$

نلاحظ مماسبق أنه يمكن كتابة مايلي :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t\,,\,y)\, dy \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t\,,\,y)\, dt\, dy$$

من العلاقة الأخيرة نجـد أن :

$$F(x \mid y)\, f(y) = \int_{-\infty}^{x} f(t\,,\,y)\, dt \qquad \text{أو} \qquad F(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t\,,\,y)}{f(y)}\, dt$$

تسمى هذه بدالة التوزيع الشرطية للمتغير X بمعلومية أن المتغيرY يأخذ قيمة معينة y، وكما هو معروف، فإنه باشتقاق هذه الدالة يمكن الحصول على مايسمى بدالـة الاحتمال الشرطية للمتغير المتصـل X بمعلومية المتغير العشوائـي Y التي يرمز لهـا بالرمز $f(x \mid y)$. الآن نورد مثالا يوضح العلاقة الرياضية السابقة.

مـثـال ٣,٧,٤

تزوّد ثلاجة تبريد بكمية عشوائية Y_2 في بداية يوم ما، وتباع كمية عشوائية Y_1 منها خلال ذلك اليوم. إذا كانت $Y_1 \le Y_2$ وكانت دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1, Y_2 معطاة كما يلي:

$$f(y_1\ ,\ y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ ,\ 0 \le y_1 \le y_2\ ,\ 0 \le y_2 \le 2 \\ 0\ ,\qquad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد مايلي:

(أ) دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير Y_1 بمعلومية أن المتغير العشوائي Y يأخذ قيمة معينة y.

(ب) قيمة احتمال بيع أقل من $\frac{1}{2}$ جالون بمعلومية أن الثلاجة تحتوي على جالون واحد.

الحـل:

أولا: المطلوب إيجاد دالة الاحتمال الشرطية $f(y_1 | y_2)$ وهذا يتطلب إيجاد دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y_2، نكتب

$$f(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1\ ,\ y_2)\, dy_1 = \int_0^{y_2} \frac{1}{2}\, dy_1$$

$$= \left(\frac{1}{2}\, y_1\right)\Bigg|_0^{y_2} = \frac{1}{2}\, y_2\ ,\ y_1 \le y_2 \le 2$$

أي أن

$$f(y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, y_2\ ,\ y_1 \le y_2 \le 2 \\ 0\ ,\quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(أ) من تعريف دالة الاحتمال الشرطية للمتغيــر Y_1 بمعلومية $Y_2 = y_2$

نجد أن:

$$f(y_1 \mid y_2) = \frac{f(y_1\ ,\ y_2)}{f(y_2)} \begin{cases} \dfrac{1/2}{y_2/2} = \dfrac{1}{y_2}\ , & 0 < y_1 \le y_2 \le 2 \\ 0 \qquad , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(ب) الاحتمال المطلوب هو

$$P\left(Y_1 \le \frac{1}{2} \mid Y_2 = 1\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(y_1 \mid y_2 = 1)\, dy_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} 1\, dy_1 = \frac{1}{2}$$

نلاحظ أنه إذا كانت الثلاجة تحتوي على جالونين في بداية اليوم، فإن قيمة الاحتمال هي:

$$P\left(Y_1 \le \frac{1}{2} \mid Y_2 = 1\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\, dy_1 = \frac{1}{4}$$

من ذلك نستنتج أن الكمية المبيعة من الثلاجة تعتمد بشكل كبير على الكمية المزودة بها.

مثال ٣,٧,٥

أوجد في المثال (٣,٦,٥) دالة الاحتمال الشرطي $f(y \mid x)$، ثم أوجد
$P\left(Y \ge \frac{r}{2} \mid X = \frac{r}{2}\right)$

الحل:

من التعريف ٣,٧,٢ نحصل على:

$$f(y \mid x) = \frac{f(x\,,\,y)}{f(x)} = \left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right)^{-1} \;,\; |y| \le \sqrt{r^2 - x^2}$$

إذن :

$$f(y \mid x) = \begin{cases} \left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right)^{-1} & , \; |y| \le \sqrt{r^2 - x^2} \\ 0 & , \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وأخيرا لإيجاد الاحتمال $P\left(Y \ge \frac{r}{2} \mid X = \frac{r}{2}\right)$ نتبع مايلي :

$$P\left(Y \ge \frac{r}{2} \mid X = \frac{r}{2}\right) = \int_{\frac{r}{2}}^{r} f(y \mid x)\, dy = \int_{\frac{r}{2}}^{r} f\left(y \mid \frac{r}{2}\right) dy$$

$$= \int_{\frac{r}{2}}^{r} \left(2\sqrt{3\,\frac{r^2}{4}}\right)^{-1} dy$$

$$= \frac{r}{2}\,\frac{1}{(\sqrt{3}\,)\,r} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

مثال ٦، ٧، ٣

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغيرين العشوائيين X , Y معطاة كما يلي :

$$f(x\,,\,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}\, x\,(2 - x - y) & , \; 0 < x < 1 \,,\, 0 < y < 1 \\ 0 & , \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فاحسب الدالة الشرطية للمتغير العشوائي X بمعلومية $Y = y$ حيث إن $0 < y < 1$.

الحـل:

لكل $0 < x < 1 , 0 < y < 1$ نحصل على :

$$f(x \mid y) = \frac{f(x , y)}{f(y)} = \frac{f(x , y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x , y)\, dx}$$

$$= \frac{x (2 - x - y)}{\int_0^1 x (2 - x - y)\, dx}$$

$$= \frac{x (2 - x - y)}{\frac{2}{3} - \frac{y}{2}} = \frac{6x (2 - x - y)}{4 - 3y}$$

مـثـال ٣,٧,٧

إذا كان لدينا دالة كثافة مشتركة $f(x , y)$ معطاة بالعلاقةالتالية :

$$f(x , y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y}\, e^{y}}{y} , & 0 < x < \infty , 0 < y < \infty \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد $P(X > 1 \mid Y = y)$.

الحـل:

من تعريف دالة الاحتمال الشرطية :

$$f(x \mid y) = \frac{f(x\,,\,y)}{f(y)} = \frac{\dfrac{e^{-x/y}\, e^{-y}}{y}}{e^{-y} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{y}\, e^{-x/y}\, dx} = \frac{1}{y}\, e^{-x/y}$$

ومن ذلك نحصل على:

$$P(X > 1 \mid Y = y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{y}\, e^{-x/y}\, dx = e^{-x/y}\Big|_1^{\infty} = e^{-1/y}$$

ملاحظة ١ ,٧ ,٣

يمكن تعميم دوال الاحتمال الشرطية في حالة وجود أكثر من متغيرين؛ فمثلا إذا كانت X_1, X_2, X_3, X_4 متغيرات منفصلة فإنه يمكننا تعريف الدوال الشرطية التالية:

$$f(x_1 \mid x_2 x_3 x_4) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f(x_2, x_3, x_4)} \;,\; f(x_2, x_3, x_4) > 0$$

$$f(x_1 x_2 \mid x_3 x_4) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f(x_3, x_4)} \;,\; f(x_3, x_4) > 0$$

وهكذا.

وكذلك الحال إذا كانت X_1, X_2, X_3, X_4 متغيرات عشوائية متصلة، فإنه يمكن تعريف دوال الاحتمال الشرطية التالية:

$$f(x_1 \mid x_2 x_3 x_4) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f(x_2, x_3, x_4)} \;,\; f(x_2, x_3, x_4) > 0$$

$$f(x_1 x_2 x_3 \mid x_4) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f(x_4)} \;,\; f(x_4) > 0$$

وهكذا.

٣,٨ المتغيرات العشوائية المستقلة

لقد تعرضنا لدوال الاحتمال الشرطية للمتغيرات العشوائية، ورأينا كيف أن هذه المتغيرات يعتمد بعضها على بعض؛ أي كيف أن المتغير العشوائي X يعتمد على قيمة المتغير العشوائي Y أو العكس. نحاول في هذا البند التعرف على استقلال هذه المتغيرات العشوائية. مما سبق دراسته يقال إن الحادثتين A , B مستقلتان إذا تحققت الخاصية التالية:

$$P(AB) = P(A).P(B)$$

في دراسة المتغيرات العشوائية، قد يكون الاهتمام منصبًا على حوادث من النوع $(c \le Y \le d)$, $(a \le X \le b)$ عندئذ يكون المتغيران X , Y مستقلين إذا كان:

$$P(a \le X \le b , c \le Y \le d) = P(a \le X \le b) . P(c \le Y \le d)$$

تعريف ٣,٨,١

إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين منفصلين أو متصلين ودالة الكثافة المشتركة لهما $f(x , y)$، وكانت دالتا الكثافة الهامشية لهما $f(x) , f(y)$ على التوالي، فإن المتغيرين العشوائيين X , Y مستقلان إذا تحققت $f(x , y) = f(x) . f(y)$

وهذا يعني أن دالة الاحتمال المشتركة$f(x , y)$ يمكن كتابتها كحاصل ضرب الدوال الهامشية للمتغيرين X , Y .

مثال ٣,٨,١

يحتوي فراغ العينة S في تجربة رمي زهرتي نرد على 36 نقطة عينة، ولكل نقطة عينة نفس فرصة الظهور $\frac{1}{36}$. فمثلا إذا كان لدينا أي نقطة عينة من فراغ العينة S ولتكن (1,2) فإن احتمالها $P(1,2) = \frac{1}{36}$.

الاحتمال الهامشي للمتغير العشوائي X هو: $P(x) = P(1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$.

الاحتمال الهامشي للمتغير العشوائي Y هو: $P(y) = P(2) = P(Y = 2) = \frac{1}{6}$.

ومن ذلك نستنتج أن: $P(1,2) = P(1) \, . \, P(2) = \frac{1}{6} \, . \, \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

وبالكيفية نفسها يمكن إثبات صحة ذلك لجميع نقط العينة في فراغ العينة S، ومنه يمكن القول إن المتغيرين X , Y مستقلان وذلك لتحقق $f(x\,,\,y) = f(x) \, . \, f(y)$ لكل زوج مرتب $(x\,,\,y)$.

مثال ٢ ,٨ ,٣

إذا كانت لدينا دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية:

$$f(y_1\,,\,y_2) = \begin{cases} 4y_1y_2 \;, & 0 \le y_1 \le 1 \,;\, 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 \;, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأثبت أن المتغيرين مستقلان.

الحل:

دالة الاحتمال الهامشي للمتغير العشوائي Y_1 هي:

$$f(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2 = \int_0^1 4y_1y_2\, dy_2$$

$$= 4y_1 \, . \, \frac{y_2^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= 2y_1 \;, \; 0 \le y_1 \le 1$$

وبالمثل، دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y_2 هي:

$$f(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_1$$

$$= \int_0^1 4y_1 y_2\, dy_1$$

$$= 2y_2 \ , \ 0 \le y_2 \le 1$$

ومن ذلك نلاحظ أن $f(y_1, y_2) = f(y_1) \cdot f(y_2)$ لكل عدد حقيقي (y_1, y_2)، وهذا هو شرط استقلال المتغيرين Y_1, Y_2.

مثال ٣,٨,٣

إذا كان لدينا الدالة التالية:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2 \ , & 0 \le y_2 \le y_1 \ ; 0 \le y_1 \le 1 \\ 0 \ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فناقش فيما إذا كان Y_1, Y_2 مستقلين.

الحل:

يمكن إيجاد دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y_1 وهي:

$$f(y_1) = \int_0^{y_1} f(y_1, y_2)\, dy_2 = \int_0^{y_1} 2\, dy_2$$

$$= 2y_2 \Big|_0^{y_1}$$

$$= 2y_1 \ , \ 0 \le y_1 \le 1$$

وبالمثل فإن دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائى Y_2 هى:

$$f(y_2) = \int_{y_2}^{1} f(y_1, y_2)\, dy_1 = \int_{y_2}^{1} 2\, dy_1$$

$$= 2y_1 \Big|_{y_2}^{1}$$

$$= 2(1 - y_2)\ ,\ 0 \le y_2 \le 1$$

واضح في هذا المثال، أنه لايمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(y_1, y_2)$ كحاصل ضرب الدوال الهامشية $f(y_2)$, $f(y_1)$ ، أي أن $f(y_1, y_2) \neq f(y_1) \cdot f(y_2)$ ، ومنه يقال إن Y_1, Y_2 غير مستقلين.

مثال ٣,٨,٤

أثبت في المثال (٣,٥,٦) أن المتغيرين العشوائيين X, Y غير مستقلين.

الحل:

لإثبات ذلك سوف نأخذ أي نقطة عينة ولتكن (0,1). من جدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X, Y نحصل على $f(0,1) = \frac{6}{28}$.

وكذلك يمكن الحصول على الدالة الهامشية $f(x)$ عندما $x = 0$ كما يلي:

$$f(0) = \frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{1}{28} = \frac{10}{28}$$

وبالمثل الدالة الهامشية $f(y)$ عندما $y = 1$ هي:

$$f(1) = \frac{6}{28} + \frac{6}{28} + 0 = \frac{12}{28}$$

من الملاحظ أن: $\frac{6}{28} \neq \frac{10}{28} \cdot \frac{12}{28}$

أي أن: $f(0,1) \neq f(0) \cdot f(1)$

وهكذا بالنسبة لبقية نقط العينة. من ذلك يمكن القول إن المتغيرين العشوائيين X, Y غير مستقلين لعدم تحقق الخاصية $f(x , y) = f(x) \cdot f(y)$.

مثال ٣,٨,٥

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرين عشوائيين منفصلين X , Y معطاة بالصيغة:

$$f(x , y) = \frac{xy^2}{30} , x = 1, 2, 3 \quad , \quad y = 1, 2$$

هل يمكن القول بأن المتغيرين X , Y مستقلان؟

الحل:

دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X هي:

$$f(x) = \sum_{y} f(x , y) = \sum_{y=1}^{2} \frac{xy^2}{30}$$

$$= \frac{x(1)^2}{30} + \frac{x(2)^2}{30}$$

$$= \frac{x}{6} \quad , \quad x = 1, 2, 3$$

وبالمثل يمكن إيجاد دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y كما يلي:

$$f(y) = \sum_{x} f(x , y) = \sum_{x=1}^{3} \frac{xy^2}{30}$$

$$= \frac{(1)y^2}{30} + \frac{(2)y^2}{30} + \frac{(3)y^2}{30}$$

$$= \frac{y^2}{5} \quad , \quad y = 1, 2$$

من الواضح أن: $\frac{xy^2}{30} = \left(\frac{x}{6}\right)\left(\frac{y^2}{5}\right) \quad , \quad x = 1, 2, 3 \; ; \; y = 1, 2$

أي أن $f(x , y) = f(x) \, . \, f(y)$ ويكون المتغيران X , Y مستقلين.
والآن نلخص كل ماسبق بإعطاء النظرية التالية:

نظرية ٣,٨,١ (بدون برهان)

إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين بدالة كثافة احتمال مشتركة $f(x,y)$ معرّفة في الفترة $a < X < b \; , \; c < Y < d$ حيث إن a, b, c, d ثوابت، فإن المتغيرين X , Y مستقلان إذا وإذا فقط $f(x , y) = k \, . \, f(x) \, . \, f(y)$.
حيث إن $f(x)$ هي دالة موجبة هامشية للمتغير العشوائي X ، و $f(y)$ دالة موجبة هامشية للمتغير العشوائي Y، و k عدد ثابت موجب.

مثال ٣,٨,٦

إذا كان Y_1, Y_2 متغيرين بدالة كثافة مشتركة معطاة كمايلي:

$$f(y_1 , y_2) = \begin{cases} 2y_1 \; , & 0 \le y_1 \le 1 \; ; 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 \; , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فهل يمكن القول إن Y_1, Y_2 متغيران عشوائيان مستقلان؟

الحـل:

باستخدام النظرية (١ ,٨ ,٣) نلاحظ أن $f(y_1 , y_2) = f(y_1) . f(y_2)$.

حيث إن $f(y_2) = \frac{1}{2}$, $f(y_1) = y_1$, $k = 1$.

مـثـال ٣,٨,٧

إذا كانت X_1, X_2, X_3 متغيرات عشوائية مستقلة ولها دوال الكثافة التالية:

$$f(x_1)=\begin{cases} e^{-x_1} , & x_1 > 0 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases} ; f(x_2)=\begin{cases} 2e^{-x_2} , & x_2 > 0 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases} ; f(x_3)=\begin{cases} 3e^{-x_3} , & x_3 > 0 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد مايلي:

(أ) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات X_1, X_2, X_3.

(ب) $P(X_1 + X_2 \le 1 , X_3 > 1)$.

الحـل:

حيث إن المتغيرات العشوائية X_1, X_2, X_3 مستقلة، فإنه يمكن كتابة دالـة كثافة الاحتمال العشوائي كحاصل ضرب دوال كثافة الاحتمال الهامشية؛ أي أن:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1) . f(x_2) . f(x_3)$$

$$= \begin{cases} 6\, e^{-(x_1 + 2x_2 + 3x_3)} , & x_1, x_2, x_3 > 0 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وعليه يكون

$$P(X_1 + X_2 \le 1\ ,\ X_3 > 1) = \int_0^{\infty} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

٣,٩ تمارين

١- إذا كانت دالة الكثافة للمتغير العشوائي X معطاة بالجدول التالي :

x	-1	0	1
f(x)	3c	3c	6c

فأوجد مايلي:

(أ) قيمة c . (ب) دالة الكثافة للمتغير $Y = 2X + 1$.

٢- يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء، 6 كرات سوداء. اختيرت عينة من الصندوق مكونة من 4 كرات وبدون إحلال. إذا كان X يمثل عدد الكرات الحمراء، فأوجد دالة الاحتمال للمتغير X .

٣- إذا كان لدينا دالة الاحتمال التالية :

$$f(x) = \begin{cases} A\left(4x - 2x^2\right)\ , & 0 \le x \le 2 \\ 0\ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد قيمة A التي تجعل f(x) دالة كثافة احتمال.

٤- إذا كان X متغيراً عشوائيّا متصلا وبدالة كثافة احتمال معطاة كمايلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \ 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{4}(3 - x) & , \ 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{4} & , \ 2 < x \le 3 \\ \frac{1}{2}(4 - x) & , \ 3 < x \le 4 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فاحسب الاحتمالات التالية :

(أ) $P(X > 3)$ (ب) $P(X = 2)$

(جـ) $P(|X| < 1.5)$ (د) $P(1 < X < 3)$

٥- إذا كان X متغيرا عشوائيّا متصلا له دالة كثافة احتمال تعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} 6x\,(x - 1) & , \ 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فاختبر أن f(x) تمثل دالة كثافة احتمال، ثم مثلها بيانيّا، وأوجد مايلي:

(أ) دالة التوزيع للمتغير العشوائي X .

(ب) $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)$, $P\left(X \le \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)$

(جـ) قيمة B التي تحقق أن $P(X < B) = 2P(X > B)$

٦- أوجد قيمة A التي تجعل الدوال التالية تمثل دوال كثافة احتمال:

(أ) $$f(x) = A\, e^{-3|x-2|} \;,\; 0 \le x \le 2$$

(ب) $$f(x) = \begin{cases} A\, x^3 e^{-x/2} & , \; x \ge 0 \\ 0 & , \; x < 0 \end{cases}$$

إذا أعطيت الحــوادث $B = \{x \mid x < 1\} \;,\; C = \{x \mid x < 2\}$ فاحسب في كــل حالة

(أ) $P(B)$ (ب) $P(C)$

(جـ) $P(B \mid C)$ (د) $P(C \mid B)$

٧- أوجد قيمة A التي تجعل الدوال التالية دوال كتلة احتمــال :

(أ) $$P(x) = \begin{cases} A\, \dfrac{3^x}{3!} & , \; x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & , \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(ب) $$P(x) = \begin{cases} A \dbinom{x+2}{x} \left(\dfrac{1}{4}\right)^x & , \; x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & , \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

إذا أعطيت الحوادث $B = \{x \mid x \le 3\}, C = \{x \mid x < 5\}$ فاحسب الاحتمالات التالية

(أ) $P(B)$ (ب) $P(C)$

(جـ) $P(B \mid C)$ (د) $P(C \mid B)$

٨- وجد أن كمية الخبز التي يبيعها أحد المخابز (لكل مائة رطل) في اليوم ظاهرة

عشوائية تحدد احتمالها دالة كثافة احتمالية على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} Ax & , \quad 0 < x \le 5 \\ A(10 - x) & , \quad 5 < x \le 10 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(أ) أوجد قيمة A التي تجعل f(x) دالة كثافة احتمال.

(ب) ارسم منحنى الدالة في (أ).

(جـ) ما احتمال أن يكون عدد الأرطال المبيعة من المخبز في أحد الأيام هو:

١- أكثر من 500 رطل؟

٢- أقل من 500 رطل؟

٣- بين 256 و 750 رطلا؟

(د) عرف الحوادث A, B, C بأنها الحوادث في a, b, c على التوالي في (جـ). ثم احسب $P(A \mid B), P(A \mid C)$. هل A, B مستقلان؟ ماذا عن A, C؟

٩- إذا كان عدد الجرائد المبيعة في اليوم يمثل ظاهرة عشوائية تحدد احتمالها الدالة:

$$p(x) = \begin{cases} Ax & , \quad x = 1, 2, \ldots, 50 \\ A(100 - x) & , \quad x = 51, 52, \ldots, 100 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(أ) أوجد قيمة A التي تجعل p(x) دالة كتلة احتمال.

(ب) ما احتمال أن يكون عدد الجرائد التي ستباع في الغد هو:

١- أكثر من 50 نسخة؟

٢- أقل من 50 نسخة؟

٣- يساوي 50 نسخة؟

٤- بين 25 و 75 نسخة؟

(جـ) إذا مثلت A, B, C, D الحوادث في (a), (b), (c), (d) على التوالي فاحسب الاحتمالات $P(A|B), P(A|C), P(A|D), P(C|D)$.

(د) هل A, B في الفقرة (جـ) مستقلان؟ ماذا عن A, D وماذا عن C, D؟

١٠- إذا كان طول المكالمات التليفونية بالدقائق من مدينة معينة يمثل ظاهرة عشوائية بدالة توزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x/3} - \frac{1}{2} e^{-[x/3]} & , \; x \geq 0 \end{cases}$$

حيث [x] هو أكبر عدد صحيح غير سالب أقل من أو يساوي x فأوجد:

(أ) احتمال أن يكون طول المكالمة التليفونية :

١- أكثر من 6 دقائق.

٢- أقل من 4 دقائق.

٣- يساوي 3 دقائق.

(ب) الاحتمال الشرطي بأطول مكالمة تليفونية يكون:

١- أقل من 9 دقائق، إذا علمنا أنها كانت أكثر من 5 دقائق.

٢- أكثر من 5 دقائق، إذا علمنا أنها كانت أقل من 9 دقائق.

١١- اعتبر ظاهرة عشوائية لها متغير عشوائي X ، ودالة توزيع F(x) معطاة كالآتي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \le 0 \\ \dfrac{x}{4} \ , & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{3} \ , & 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{x}{6} \ , & 2 < x \le 3 \\ \dfrac{1}{2} \ , & 3 < x \le 4 \\ \dfrac{x}{8} \ , & 4 \le x \le 8 \\ 1 \ , & x > 8 \end{cases}$$

(أ) ارسم دالة التوزيع.

(ب) حدد نوع دالة التوزيع.

(جـ) احسب قيمة احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي للظاهرة قيمة بين 2 و 5 إذا علمت أنه كان يأخذ قيمًا بين 1 و 6 شاملا النهايتين في الحالتين.

١٢- اعتبر دالة التوزيع $F(x)$ لمتغير عشوائي المعطاة بالآتي:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{x-1}{3} \right)$$

(أ) ارسم دالة التوزيع.

(ب) أوجد دالة الكثافة المقابلة وارسم منحنى هذه الدالة.

(جـ) احسب قيمة:

$$P(X<2),\ P(X>3),\ P(X<1+\sqrt{3}),\ P(X>2 \mid X<1+\sqrt{3})$$

١٣- إذا كان لدينا دالة كثافة احتمال مشتركة للمتغيرين X , Y قيمها هي:

$$f(1,1)=\frac{6}{30}\ ,\ f(1,2)=\frac{1}{30}\ ,\ f(1,3)=\frac{1}{30}$$

$$f(2,1)=\frac{4}{30}\ ,\ f(2,2)=\frac{5}{30}\ ,\ f(2,3)=\frac{1}{30}$$

$$f(3,1)=\frac{2}{30}\ ,\ f(3,2)=\frac{4}{30}\ ,\ f(3,3)=\frac{6}{30}$$

فأوجد كل التوزيعات الهامشية والشرطية.

١٤- يمثل الجدول التالي دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X , Y :

Y \ X	1	2	3
1	1/12	1/6	0
2	0	1/9	1/5
3	1/18	1/4	2/15

(أ) احسب $f(y \mid x),\ f(x \mid y),\ h(y),\ g(x)$.

(ب) تعرّف فيما إذا كان المتغيران X , Y مستقلين.

١٥- الدالة المشتركة للمتغيرين X , Y معطاة كمايلي:

$$f(x\,,\,y)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{3}xy\ ,\ 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 2 \\ 0\ ,\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(أ) اختبر أن $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x , y)\, dx\, dy = 1$.

(ب) احسب الاحتمالات

١- $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$

٢- $P(Y < X)$

٣- $P(X + Y > 1)$

٤- $P\left(Y < \frac{1}{2} \,\middle|\, X < \frac{1}{2}\right)$

١٦- إذا كان لدينا كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X , Y معطاة بالعلاقة:

$$f(x , y) = \begin{cases} 3x^2y + 3\,xy^2 \ , & 0 \le x \le 1 \ , 0 \le y \le 1 \\ 0 \ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد الدوال الهامشية والشرطية، ثم أوجد الاحتمال الشرطي :

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{4} \,\middle|\, \frac{1}{2} \le Y \le \frac{2}{3}\right)$$

١٧- إذا كان X متغيرًا عشوائيًا له التوزيع الاحتمالي التالي :

x	-1	0	1	2	3
f(x)	0.125	0.50	0.20	0.05	0.125

فأوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغيرات $Y = 2X + 1$, X^2, e^X.

١٨- تتمثل محاولات مستقلة في رمي قطعة من النقود المعدنية، وكان p احتمال ظهور الصورة (H) حيث تجري عدة محاولات إلى أن تظهر صورة (H) أو الحصول على n رمية. إذا كان X يمثل عدد الرميات للقطعة المعدنية، فما القيم الممكنة التي يأخذها المتغير X، وما توزيعه الاحتمالي؟

١٩- كانت مدة صلاحية بطارية راديو مقيسة بالساعات تمثل بمتغير عشوائي X له دالة كثافة احتمال هي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 100 \\ \dfrac{100}{x} & , \ x > 100 \end{cases}$$

إذا كان يوجد 5 بطاريات في الجهاز، فما احتمال أن تستبدل بطاريتان على وجه التحديد في الـ 150 ساعة الأولى؟

٢٠- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغيرات العشوائية X , Y , Z هي

$$f(x , y , z) = \begin{cases} e^{-(x+y+z)} & , \ 0 < x, y, z < \infty \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد مايلي:

(أ) دالة التوزيع $F(x , y , z)$.

(ب) الدوال الهامشية.

٢١- سحبت 3 كرات عشوائيًا وبدون إحلال من صندوق بـه 20 كرة مرقمة من 1 إلى 20. إذا كان ينص حدس على أنه يوجد على الأقل لواحدة من الكرات المسحوبة رقمًا يساوي أو أكبر من 17 ، فأوجد الصيغة الرياضية التي تمثل دالة الاحتمال للمتغير العشوائي المعرّف في هذه التجربة، ثم أوجد احتمال تحقق الحدس.

٢٢- لدينا الدالة F(x) معرفة كالتالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x+1}{2} & , \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

(أ) اختبر فيما إذا كانت الدالة F(x) تمثل دالة توزيع.

(ب) ما نوع المتغير العشوائي الذي تمثله الدالة F(x)؟

(جـ) أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X.

(د) أوجد $P(X = 0)$ و $P\left(-3 < X \le \frac{1}{2}\right)$.

٢٣- هل توجد قيمة للثابت c إذا كانت الدالة التالية:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x} & , \quad x = 1, 2, \ldots \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

تمثل دالة كتلة احتمال للمتغير X ؟

٢٤- يمثل المتغيران X , Y درجتي الحرارة في بلدين مختلفين، وكانت لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية:

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy\, e^{-\frac{x+y}{\lambda}} & , \quad x > 0 , y > 0 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أوجد مايلي:

(أ) قيمة c.

(ب) دالة التوزيع المشتركة $F(x, y)$ المرافقة للدالة $f(x, y)$.

٢٥- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتغيرين متصلين تعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & , \ 0 < x, y < \infty \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(أ) الدوال الهامشية $f(x), f(y)$.

(ب) دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X / Y.

(جـ) $P(X > 1 \mid Y = y)$.

(د) مماسبق، هل يمكن القول إن X, Y مستقلان؟

٢٦- كرة نصف قطرها x له دالة التوزيع التراكمية التالية:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & , \ 0 \le x < 1 \\ 1 & , \ x \ge 1 \end{cases}$$

(أ) أوجد دالة كثافة احتمال نصف القطر x.

(ب) إذا كان حجم الكرة هو $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ فما احتمال أن يكون حجم الكرة V أكبر من القيمة v_0؟

٢٧- تحلق طائرة حربية حاملة للذخيرة بشكل مباشر فوق سيارة شحن لنقل

البضائع. إذا سقطت الذخيرة على مسافة عمودية مقدارهـا 40 قدمًا فإن الشاحنة سوف تدمَّر وتتعطل حركة السير. إذا كان X يمثل المسافة العمودية للشاحنة بدالة الاحتمال $0 \le x \le 100$, $f(x) = \frac{100 - x}{5000}$ و $f(x) = 0$ خلاف ذلك، فأوجد احتمال أن تعرقل الذخيرة حركة السير.

٢٨- يصوب شخص بندقيته نحو هدف معين، وكانت نقطة الهدف أي نقطة (X, Y) في دائرة نصف قطرها r ومركزها $(0,0)$. إذا كان يمكن وصف (X, Y) بدالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x, y)$ التالية:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} , & x^2 + y^2 \le r^2 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد مايلي:

(أ) دوال الاحتمال الهامشية $f(x), f(y)$.

(ب) الاحتمال الشرطي $g(y \mid x)$.

(جـ) $P\left(Y \ge \frac{r}{2} \mid X = \frac{r}{2}\right)$.

٢٩- إذا كان X, Y لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة كما هي موضحة بالجدول:

(x,y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
f(x,y)	2/15	4/15	3/15	1/15	1/15	4/15

أوجد:

(أ) الدوال الهامشية.

(ب) معامل الارتباط.

(يمكن ملاحظة أن $f(x, y) = 0$ فيما عدا ذلك).

٣٠- اختيرت ثلاث كرات بطريقة عشوائية من صندوق به 3 كرات بيضاء، و 3 كرات حمراء، و 3 كرات سوداء. لنفرض أننا نكسب ريالا واحدًا عن كل كرة بيضاء مختارة، ونخسر ريالا واحدا عن كل كرة حمراء مختارة. إذا كان X يمثل إجمالي الربح فما التوزيع الاحتمالي للمتغير X ؟

٣١- تقدم ثمانية أشخاص من حفظة كتاب الله الكريم، من بعض مناطق المملكة، منهم 3 من الوسطى، و 2 من الجنوبية، و 3 من الغربية. يراد اختيار متسابقين لتمثيل المملكة في المسابقة الدولية السنوية لتحفيظ القرآن الكريم. إذا كان X يمثل عدد المتقدمين من الوسطى و Y يمثل عدد المتقدمين من الجنوبية فأوجد:

(أ) صيغة رياضية لدالة الاحتمال المشتركة التي تمثل عدد المتقدمين من الوسطى والجنوبية.

(ب) احتمال ألا يتجاوز مجموع المتقدمين من الوسطى والجنوبية واحدًا أو يساويه.

الفصل الرابع

التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية

● التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المنفصلة ● التوقع الرياضي لدالة في المتغير العشوائي المنفصل ● خواص التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المنفصلة ● التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المتصلة ● التوقع الرياضي لدالة في المتغير العشوائي المتصلة ● حساب التغاير لمتغيرين عشوائيين ● خواص التغاير ● تباين مجموع أو طرح متغيرين عشوائيين ● معامل الارتباط لمتغيرين عشوائيين ● خواص معامل الارتباط ● متباينة تشبشف ● تمارين

مقدمــــة

من المعروف أن التوقع الرياضي من أكثر المفاهيم في نظرية الاحتمالات أهمية وفائدة في حل كثير من المسائل والمشكلات الرياضية الصعبة المتعلقة بتوزيعات المتغيرات العشوائية. كما يمكن معرفة خصائص التوزيع مثل التفرطح والانتشار وذلك بدراسة الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري والمنوال. ويستخدم التوقع الرياضي كذلك لتقدير معالم التوزيع المجهولة إذا توافرت بيانات كافية (عينة) منه.

١ , ٤ التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المنفصلة

إذا كان لدينا متغير عشوائي منفصل X، يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ باحتمالات $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n) \ldots$ حيث إن $\sum_i f(x_i) = 1$ فإن التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المنفصل X، يرمز له بالرمز E(X)، يعطى بالعلاقة

$$E(X) = x_i f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_n f(xn) + \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

بشرط أن تكون عملية الجمع تقاربية. إذا كان المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ عددا منتهيا من القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ باحتمالات مقابلة $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ فإن التوقع الرياضي يعطى كما يلي:

$$E(X) = x_i f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_n f(x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

يمكن تلخيص ما سبق في التعريف التالي:

تعريف ١ , ١ , ٤ (التوقع الرياضي للمتغير المنفصل)

إذا كان X متغيرا عشوائيّا منفصلا معرفا على فراغ العينة S، ودالة احتماله f(x)، فإن التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) للمتغيرة العشوائي المنفصل X، ويرمز له بالرمز E(X)، يعرّف بالصيغة الرياضية التالية:

$$E(X) = \sum_x x \; f(x)$$

مثال ١ , ١ , ٤

في تجربة رمي ثلاث قطع معدنية، كان X متغيرا عشوائيّا يمثل عدد مرات

ظهور الصورة (H). ما القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X؟

الحل

في تجربة رمي ثلاث قطع معدنية كان فراغ العينة S يحتوي على $8 = 2^3$ نقطة عينة، وكل نقطة عينة لها نفس فرصة الظهور؛ أي أن:

$$P(E_i) = \frac{1}{8}, \; i = 1, 2, 3, \ldots, 8$$

وحيث إن X متغير عشوائي يمثل عدد مرات ظهـور الـصـورة (H) فإن توزيعـه الاحتمالي هو:

x	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

يمكننا الآن إيجاد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X وذلك باستخدام التعريف ١, ١, ٤ كما يلي:

$$E(X) = 0.\frac{1}{8} + 1.\frac{3}{8} + 2.\frac{3}{8} + 3.\frac{1}{8} = 1.5$$

من الملاحظ أن القيمة المتوقعة E(X) ليست عددا صحيحا، ولا تمثل أحد قيم المتغير العشوائي X. يمكن التعبير عن ذلك بأنه إذا أجريت تجربة رمي ثلاث قطع معدنية عدة مرات فإن إمكانية الحصول على الصورة (H) يكون بمعدل 1.5.

مثال ٢, ١, ٤

يربح بائع للمظلات الشمسية 30 ريالا يوميًا إذا كان الجو ممطرا، ويخسر 6 ريالات إذا كان الجو صحوا. ما توقع ربحه إذا كان احتمال أن يكون الجو ممطرا هو 0.3؟

الحل

نفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد الريالات التي يربحها البائع، وتكون قيمه الممكنة هي 6- و 30، واحتمالاتها 0.7 و 0.3 على التوالي، حيث إن 0.7 يساوي احتمال عدم سقوط المطر، ويصبح التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X هو

$$E(X) = \sum_x x \ f(x) = 30(0.3) + (-6)(0.7) = 9 - 4.2 = 4.8$$

مثال ٤, ١, ٣

ما هو التوقع الرياضي لعدد حالات الفشل التي تسبق أول حالة نجاح عند إجراء عدد لا نهائي من المحاولات المتكررة المستقلة، إذا كان احتمال نجاح كل محاولة ثابتا في كل الحالات وليكن p؟

الحل:

نفرض أن X متغير عشوائي يمثل حالات الفشل التي تسبق أول حالة نجاح، لذا فإن X يأخذ القيم ...,0, 1, 2, 3 باحتمالات مصاحبة ...,p, pq, q^2p, q^3p على التوالي، حيث $q = 1 - p$ هو احتمال عدم تحقق التجربة.

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X هو

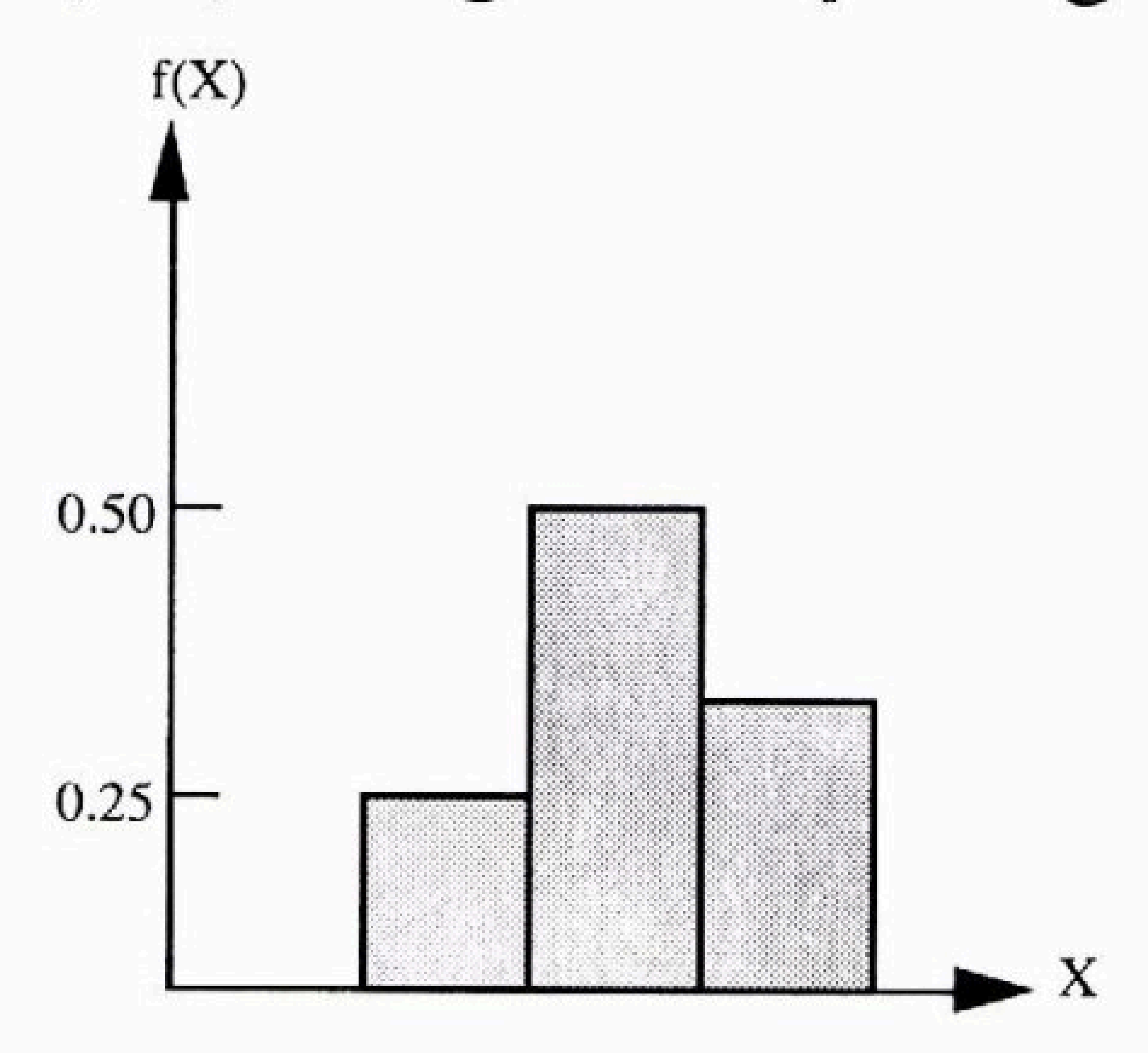
$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots \\ &= 0.p + 1qp + 2q^2p + 3q^3p + \dots \\ &= qp\,(1 + 2q + 3q^2 + \dots) \\ &= qp\,(1 - q)^{-2} = qp(p)^{-2} \\ &= \frac{qp}{p^2} = \frac{q}{p} \end{aligned}$$

مثال ٤, ١, ٤

إذا كان المتغير العشوائي X يأخذ القيم 0, 1, 2 ودالة احتماله f(x) هي

x	f(x)
0	1/4
1	1/2
2	1/4

فإنه يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي السابق بالمدرج الاحتمالي التالي



الشكل رقم (١ , ٤). رسم تكرار أو دالة التوزيع الاحتمالي.

من الجدول الاحتمالي والمدرج الاحتمالي نلاحظ أن متوسط أو مركز التوزيع الاحتمالي يقع عند النقطة $x = 1$. سنحاول إثبات أن التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) للمتغير العشوائي المنفصل X هو متوسط أو مركز التوزيع الاحتمالي للمتغير X ؛ أي أن :

$$E(X) = \sum_{x} x \; f(x) = 1$$

لإثبات ذلك سوف نفترض أننا قمنا بتجربة ما عدد من المرات وليكن 4,000,000 مرة وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات إجراء التجربة عند القيم الموضحة في الجدول التالي :

x	عدد مرات إجراء التجربة n
0 1	1,000,000 2,000,000

فعليه يمكن الحصول على

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

حيث إن $N = 4{,}000{,}000$

$$\mu = \frac{(0)\ 1{,}000{,}000 + (1)2{,}000{,}000 + (2)1{,}000{,}000}{4{,}000{,}000}$$

إذن

$$= 0\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{2} x\ f(x) = 1$$

أي أن القيمة المتوقعة $E(X)$ هي متوسط أو معدل مجموعة القياسات أو المشاهدات.

ملاحظة ٤ , ١ , ١

(أ) عندما يأخذ المتغير العشوائي x قيما منتهية، فإن التوقع الرياضي $E(X) = \sum_{x} x\ f(x)$ هو المتوسط المرجح لهذه القيم واحتمالاتها المقابلة.

(ب) إذا كان المتغير العشوائي X يأخذ قيما منتهية n وكل قيمة لها الاحتمال نفسه $\frac{1}{n}$، فإن التوقع الرياضي $E(X) = \sum_{x}^{n} x\ \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{x}^{n} x$ هو المتوسط

الحسابي لمجموعة القيم $x_1, x_2, ..., x_n$.

(جـ) يمكن حساب القيمة المتوقعة لكل من ax و $[X - E(X)]^2$ لأنها متغيرات عشوائية، وتكون قيمتها منتهية أو غير ذلك حسب قيمة المتغير العشوائي X .

٢ , ٤ التوقع الرياضي لدالة في المتغير العشوائي المنفصل

إذا كانت $H(X)$ دالة في المتغير العشوائي المنفصل (function of a discrete random variable X) فإن $H(X)$ هي أيضا متغير عشوائي وله قيمة متوقعة$E(H(X))$ ؛ أي أن الدالة في المتغير العشوائي هي متغير عشوائي أيضا .

إذا كان X متغيرا عشوائيّا منفصلا ، ودالة احتماله $f(x)$ فإن القيمة المتوقعة للدالة $H(X)$ تعرف كمايلي :

$$E[H(X)] = H(x_1)\ f(x_1) + H(x_2) + ... + H(x_n)\ f(x_n)$$
$$= \sum_i H(x_i)\ f(x_i)$$

يمكن ملاحظة أن الدالة $H(X)$ تأخذ القيمة $H(x_i)$ عندما $X = x_i$.

تعريف ١ , ٢ , ٤

إذا كانت $H(X)$ دالة في المتغير العشوائي المنفصل X والذي دالة احتماله $f(x)$ ، فإن القيمة المتوقعة للدالة $H(X)$ تعرف بالصيغة التالية :

$$E[H(X)] = \sum_x H(X)\ f(x)$$

ملاحظة ١ , ٢ , ٤

باستخدام التعريف السابق يمكن أن نستنتج على وجه الخصوص المفاهيم الآتية :

إذا كانت $H(X)=X^2$ فإن $E[H(X)] = E(X^2) = \sum x^2\ f(x)$

وإذا أخذنا $H(X) = (X-\mu)^2$ حيث μ هو متوسط المجتمع ، فإن :

$$E[H(X)] = E(X-\mu)^2 = \sum (x_i - \mu)^2\ f(x)$$

هذه القيمة المتوقعة تسمى تباين (variance) المتغير العشوائي X، ويرمز لها بالرمز Var (X) أو σ^2؛ أي أن:

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_{x}(x_i-\mu)^2 \;\; f(x) = E(X^2) - [W(X)]^2$$

وكذلك يسمى الجذر التربيعي الموجب للتباين بالانحراف المعياري (standard deviation). وبصفة عامة إذا كانت $H(X) = X^r$, r = 1, 2, ... فإن:

$$E(X^r) = \sum x_i^r \;\; f(x)$$

وهذه تسمى العزم الرائي حول نقطة الأصل للمتغير العشوائي X، ويرمز له بالرمز μ_r^1. وبالمثل إذا كان لدينا $H(X) = (X-\mu)^r$, r = 1, 2, ... فإننا نحصل على:

$$E(X-\mu)^r = \sum (x_i-\mu)^r \;\; f(x)$$

الذي يسمى العزم الرائي حول الوسط μ للمتغير العشوائي X ويرمز له بالرمز μ_r.

مثال ١ , ٢ , ٤

من الجدول الاحتمالي التالي أوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X.

x	f(x)
0	1/8
1	1/4
2	3/8
3	1/4

من تعريف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X نحصل على:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{3} x \;\; f(s) = 0 \left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) = 1.75$$

وكذلك من تعريف التباين للمتغير العشوائي X نجد أن :

$$\begin{aligned}
Var(X) = \sigma^2 = E\ [(X-\mu)^2] &= \sum_{x=0}^{3}(x-\mu)^2 f(x) \\
&= (0-1.75)^2\left(\frac{1}{8}\right)+(1-1.75)^2\left(\frac{1}{4}\right)+(2-1.75)^2\left(\frac{2}{8}\right)+(3-1.75)^2\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= 0.9375
\end{aligned}$$

ومن ذلك يمكن الحصول على الانحراف المعياري σ وذلك بأخذ الجذر التربيعي كما يلي :

$$\sigma = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{var(X)} = \sqrt{0.9375} = 0.97$$

مثال ٢ , ٢ , ٤

إذا كانت دالة احتمال المتغير العشوائي X معطاة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}\ , & x = 1,\ 2,\ 3\\ 0 & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

فإن العزم الثالث للمتغير العشوائي حول نقطة الأصل

$$\begin{aligned}
\mu_r^3 = E(X^3) = \sum_x x^3 f(x) &= \sum_{x=1}^{3} x^3\,\frac{x}{6} = \sum_{x=1}^{3}\frac{x^4}{6} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{3}x^4 \\
&= \frac{1}{6}\ (1+16+81) = \frac{1}{6}+\frac{16}{6}+\frac{81}{6} = \frac{98}{6}
\end{aligned}$$

مثال ٣ , ٢ , ٤

إذا كان X له التوزيع الاحتمالي التالي :

x	1	2	3	4	5
f(x)	0.20	0.30	0.20	0.2	0.1

فأوجد $E(3X-1),\ E(X^2),\ E(X^2+2)$

الحل:

الآن يمكننا إيجاد دالة احتمال المتغير العشوائي $H(X) = 3X - 1$ ممثلة كالتالي :

x	1	2	3	4	5
f(x)	0.20	0.30	0.20	0.2	0.1
3X - 1	2	5	8	11	14

ومنه يمكن حساب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي $H(X) = 3X - 1$ كما يلي :

$$\begin{aligned} E\,[H(X)] &= E(3X-1) = \sum (3x-1)\ f(x) \\ &= 2(0.2)+5(0.3)+8(0.2)+11(0.2)+14(0.1) \\ &= 0.4+1.5+1.6+2.2+1.4 = 7.1 \end{aligned}$$

وبالمثل يمكن تمثيل دالة احتمال المتغير العشوائي $H(X) = X^2$ كما يلي :

x	1	2	3	4	5
f(x)	0.20	0.30	0.20	0.2	0.1
X^2	1	4	9	16	25

أي أن التوقع الرياضي $H(X) = X^2$ هو :

$$\begin{aligned} E\,[H(X)] &= E(X^2) = \sum x^2\ f(x) \\ &= 1(0.2)+4(0.3)+9(0.2)+16(0.2)+25(0.1) \\ &= 0.2+1.2+1.8+3.2+2.5 = 8.9 \end{aligned}$$

وأخيرا تمثل دالة احتمال المتغير العشوائي $H(X)$ كما يلي :

x	1	2	3	4	5
f(x)	0.20	0.30	0.20	0.2	0.1
X^2+2	3	6	11	18	27

ومن ذلك ينتج أن

$$E[H(X)] = E(X^2+2) = \quad (x^2+2)\ f(x) = 10.9$$

مثال ٤ , ٢ , ٤

إذا كان X متغيرا عشوائيًا يمثل عدد النقط التي يمكن الحصول عليها عند رمي زهرة النرد متزنة مرة واحدة، فأوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي $H(X)=2X^2+1$.

الحل:

من المعروف أن تجربة رمي زهرة النرد تجربة متغيرات عشوائية منفصلة . وبذلك يمكن القول بأن X في هذه التجربة هو متغير عشوائي منفصل . وحيث إن زهرة النرد متزنة ، فإن لكل X الاحتمال نفسه؛ أي أن :

$$f(x) = \frac{1}{6}\ ,\ x = 1,\ 2,\ ...,\ 6$$

وعليه من تعريف التوقع الرياضي لدالة المتغير العشوائي المنفصل X نجد أن :

$$\begin{aligned} E[H(X)] &= E(2X^2+1) = \sum (2x^2+1)\ f(x) \\ &= \sum_{x=1}^{6} (2x^2+1\frac{1}{6}) \\ &= \frac{1}{6}(3+9+19+33+51+73) = 31.33 \end{aligned}$$

٤ , ٣ خواص التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المنفصلة

نتعرض هنا لبعض الخواص الأساسية العامة للتوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المتقطعة أو المنفصلة التي تسهل العمليات الحسابية المتعلقة بالتوقع الرياضي، ومن جملة هذه الخواص مايلي :

الخاصية الأولى

القيمة المتوقعة لأي قيمة ثابتة هي القيمة الثابتة نفسها؛ أي أنه إذا كان a ثابتا فإن $E(a) = a$.

البرهان

إذا كان X متغيرا عشوائيّا منفصلا له دالة احتمال $f(x_i) = P(X=x_i)$ حيث $i=1, 2, ..., n$ فإن من تعريف التوقع الرياضي نحصل على :

$$\begin{aligned} E(a) &= \sum_{i=1}^{n} a\ f(x_i) \\ &= a\ f(x_1) + a\ f(x_2) + ... + a\ f(x_n) \\ &= a\ [f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)] \\ &= a \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \end{aligned}$$

لكن من المعروف أن $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$ ، إذن

$$E(a) = a$$

الخاصية الثانية

إذا كان X متغيرا عشوائيّا منفصلا ، وكانت a, b ثوابت ، فإن :

$$E(aX+b) = a\ E(X) + b$$

البرهان

نفرض أن دالة الاحتمال للمتغير العشوائي X هي $f(xi)$ لكل $i=1, 2, .., n$. إذن من تعريف التوقع الرياضي نجد أن :

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)\ f(x_i) \\ &= (ax_1 + b)\ f(x_1) + (ax_2 + b)\ f(x_2) + ... + (ax_n + b)\ f(x_n) \\ &= a\ [x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + ... + x_n f(x_n)] + b[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)] \\ &= a \sum_{i=1}^{n} x_i\ f(x_i) + b \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = a\ E(X) + b \end{aligned}$$

حيث إن :

$$\sum_{i} x_i \; f(x_i) = E(X) \;,\; \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

ملاحظة ١ , ٣ , ٤

تسمى $E(aX+b) = aE(X)+b$ بالقيمة المتوقعة للتحويلة الخطية للمتغير العشوائي X .

إذا كان $b = 0$ فإن $E(aX) = aE(X)$

إذا كانت $a = 1, b = -\mu$ فإننا نحصل على :

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= E(X-\mu) = E(X)-\mu \\ &= \mu - \mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

أي أن القيمة المتوقعة لانحرافات المتغير العشوائي X عن متوسطه الحسابي μ تساوي صفرا ، وهذا يكافىء خاصية من خصائص المتوسط الحسابي التي تنص على أن المجمع الجبري لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفرا .

الخاصية الثالثة

القيم المتوقعة لمجموع أي متغيرين عشوائيين يساوي مجموع توقعاتها الرياضية ؛ أي أن :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

البرهـــان

نفرض أن X, Y متغيران عشوائيان منفصلان معرفان على فراغ العينة S ، وأن المتغير العشوائي X يأخذ القيم $X_1, X_2, \ldots, X_m$ باحتمالات $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_m)$ ، وكذلك المتغير العشوائي Y يأخذ القيم $y_1, y_2, \ldots, y_m$ باحتمالات $h(y_1), \ldots, h(y_m)$ ، عندئذ يكون المجموع $X+Y$ متغيرا عشوائيّا يأخذ القيم $xi+yj$ باحتمالات $f(x_i,y_j)$ لكل $i=1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$.

من تعريف التوقع الرياضي نحصل على :

$$E(X+Y)=\sum_{i}\ \sum_{j}\ (x_i+y_j)\ f(x_i\ ,\ y_j)$$

إذن

$$E(X+Y)=\sum_{i}\ \sum_{j}\ x_i\ f(x_i\ ,\ y_j)+\sum_{i}\ \sum_{j} y_j\ f(x_i\ ,\ y_j)$$

لكن

$$\begin{aligned}
\sum_{i}\ \sum_{j}\ x_i\ f(x_i\ ,\ y_j) &= \sum_{i} x_i \sum_{j}\ f(x_i\ ,\ y_j)\\
&= \sum_{i}[f(x_i\ ,\ y_1)+f(x_i\ ,\ y_2)+\ldots+\ f(x_i\ ,\ y_n)\\
&= \sum_{i} x_i\ \ g(x_i)\\
&= E(X)
\end{aligned}$$

حيث إن $\sum_{j} f(x_i\ ,\ y_j)$ هي دالة هامشية للمتغير العشوائي X .

وبالمثل أيضا :

$$\begin{aligned}
\sum_{i}\ \sum_{j}\ y_j\ f(x_i\ ,\ y_j) &= \sum_{j} y_j \sum_{i}\ f(x_i\ ,\ y_j)\\
&= \sum_{j} y_j\ [f(x_1\ ,\ y_j)+f(x_2\ ,\ y_j)+\ldots+f(x_n\ ,\ y_j)]\\
&= \sum_{j} y_j\ h(y_j)\\
&= E(Y)
\end{aligned}$$

حيث إن $h(y_j)\ =\ \sum_{i} f(x_i\ ,\ y_j)$ دالة هامشية في المتغير العشوائي Y

ومن ذلك ينتج أن : $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

ملاحظة ٢ , ٣ , ٤

(أ) يمكن تعميم الخاصية الثالثة لأي عدد نهائي من المتغيرات العشوائية كما يلي :

إذا كان لدينا عدد n من المتغيرات العشوائية المنفصلة $X_1, X_2, ..., X_n$ فإن :

$$E(X_1, X_2, ..., X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$

أو يمكن كتابة ذلك كما يلي :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[E(X_i)\right]$$

أي أن القيمة المتوقعة لأي عدد نهائي من المتغيرات العشوائية يساوي مجموع توقعاتها الرياضية .

الخاصية الرابعة

القيمة المتوقعة لحاصل طرح أي متغيرين عشوائيين يساوي طرح توقعاتهما الرياضية؛ أي أن :

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

نترك برهان هذه الخاصية للقارئ لأنه مشابه تماماً لبرهان الخاصية الثالثة .

الخاصية الخامسة

القيمة المتوقعة لحاصل ضرب متغيرين عشوائيين مستقلين يساوي حاصل ضرب توقعاتهما الرياضية؛ أي أن :

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

البرهان:

نفرض أن X متغير عشوائي يأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_m$ ، وكذلك Y

متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $y_1, y_2, ..., y_n$. نفرض كذلك أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X القيمة x_i هو $g(x_i)$ ، وأن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي Y القيمة y_j هو $h(y_j)$ ، وأن حاصل الضرب XY هو متغير عشوائي يأخذ القيم $x_i y_j$ باحتمالات $f(x_i, y_j)$ لكل $j = 1, 2, ..., n$, $i = 1, 2, ..., m$. وحيث إن X, Y متغيران عشوائيان مستقلان، فإن دالة الاحتمال المشتركة لهما يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$f(x_i, y_j) = g(x_i)\, h(y_j)$$

إذن من تعريف التوقع الرياضي:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_i \sum_j x_i\, y_j\, f(x_i, y_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i\, y_j\, g(x_i)\, h(y_j) \\ &= \sum_i x_i\, g(x_i) \sum_j y_j\, h(y_j) \\ &= E(X)\, E(Y) \end{aligned}$$

ملاحظة ٣ , ٣ , ٤

يمكن تعميم الخاصية الخامسة لأي عدد نهائي من المتغيرات العشوائية n كما يلي:

إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة فإن:

$$E(X_1 X_2 ... X_n) = E(X_1)\, E(X_2)\, ...\, E(X_n)$$

أو على الصورة التالية:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \left[E(X_i)\right]$$

الخاصية السادسة

إذا كانت $H(X)$ دالة في المتغير العشوائي X، وكانت a مقدارًا ثابتًا فإن:

$$E[a\,H(X)] = a\,E[H(X)]$$

البرهـان:

من تعريف التوقع الرياضي لدالة المتغير العشوائي المنفصل X نحصل على:

$$\begin{aligned} E[a\,H(X)] &= \sum a\,H(X)\,f(x) \\ &= a\sum H(X)\,f(x) \\ &= a\,E[H(X)] \end{aligned}$$

الخاصية السابعة

القيمة المتوقعة لمجموع دوال المتغير العشوائي X تساوي مجموع قيمها المتوقعة؛ أي إذا كانت $H_1(X), H_2(X), \ldots, H_k(X)$ تمثل عدد k من دوال المتغير العشوائي X فإن:

$$E[H_1(X) + H_2(X), \ldots + H_k(X)] = E[H_1(X)] + E[H_2(X)] + \ldots + E\,[H_k(X)]$$

البرهـان:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{k} H_i(X)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum H_i(X)\right] f(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} H_i(X)\,f(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{k} E[H_i(X)] \end{aligned}$$

الخاصية الثامنة

إذا كانت $H_1(X) \leq H_2(X)$ لجميع قيم x فإن:

$$E\left[H_1(X)\right] \leq E\left[H_2(X)\right]$$

البرهـان:

من أصول التكامل أنه إذا كانت $h(x) \geq 0$ لجميع قيم x في الفترة (a , b) فإن:

$$\int_a^b h(x)\, dx \geq 0$$

فإذا اعتبرنا أن:

$$h(x) = \left[H_2(X) - H_1(X)\right] f(x)$$

حيث $H_1(X) \leq H_2(X)$, $f(x) \geq 0$ لجميـــــع قيم x الحقيقيـــــة، فإن $h(x) > 0$ لجميع قيم x الحقيقية وتكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_2(X) - H_1(X)\right] f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx \geq 0$$

$$E\left[H_2(X)\right] - E\left[H_1(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} H_2(x)\, f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} H_1(x)\, f(x)\, dx$$

$$E\left[H_2(X)\right] \leq E\left[H_1(X)\right]$$

الخاصية التاسعة

سبق أن ذكرنا في الملاحظة (١ , ٢ , ٤) أن التباين للمتغير العشوائـي X هو القيمة المتوقعة لمربع انحرافات المتغير العشوائي عن متوسطه الحسابي؛ أي أن:

$$Var(X) = E\left[(X - \mu)^2\right] = E\left[(X)^2\right] - \mu^2$$

البرهـان:

$$Var(X) = E\left[(X - \mu)^2\right] = E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right]$$

باستخدام الخاصية السادسة نجد أن :

$$Var(X) = E\left[(X)^2\right] = E\left[2\mu X\right] + E\left(\mu^2\right)$$

وحيث إن m ثابت، وبتطبيق الخاصية الأولى والثانية نحصل على

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[X^2\right] - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E\left[X^2\right] - \mu^2 \end{aligned}$$

وهذه الخاصية تفيد في تقليل الجهد المبذول لحساب تباين المتغير العشوائي X .

ملاحظة ٤ , ٣ , ٤

(أ) يمكن ملاحظة أن للتباين صورا أخرى بالإضافة إلى الخاصية الثامنة؛ منها :

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E\left(X - \mu\right)^2$$

وحيث إن $\mu = E(X)$ فإنه يمكن كتابة ذلك على الصورة التالية :

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E(X - E(X))^2$$

وجميع هذه الصور متكافئة وتعني شيئا واحدا .

(ب) يمكن أن نستنتج من الخاصية الثامنة بعض المفاهيم الخاصة التالية :

إذا كان $X = a$ فإن

$$\begin{aligned} Var(a) &= E\left[a\right]^2 - \left[E(a)\right]^2 \\ &= a^2 - a^2 = 0 \end{aligned}$$

أي أن تباين العدد الثابت يساوي صفرا .

إذا كان $X = aX$ حيث إن a ثابت فإن :

$$\begin{aligned} Var(aX) &= E\left[aX\right]^2 - \left[E(aX)\right]^2 \\ &= a^2\, E\left[X^2\right] - a^2\left[E(X)\right]^2 \\ &= a^2\left[E(X^2) - (E(X))^2\right] = a^2\, Var(X) \end{aligned}$$

إذا كان $X = aX + b$ حيث إن a, b ثوابت فإن:

$$Var(aX \pm b) = E[aX + b]^2 \pm [E(aX + b)]^2 = a^2 \ Var(X)$$

مثال ١, ٣, ٤

إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين منفصلين، ودالة الاحتمال المشتركة لهما موضحة بالجدول الآتي:

y \ x	2	4
1	0.1	0.15
3	0.2	0.3
5	0.1	0.15
f(x)	0.4	0.6

فأوجد ما يلي

$$E(X), \quad E(y), \ E(X+Y), \quad E(2X-3Y), \quad E(XY)$$

الحل:

لحساب القيمة المتوقعة للمتغيرين العشوائيين X, Y يلزمنا إيجاد الدوال الهامشية أو الخاصة لكل من المتغيرين X, Y؛ أي الحصول على الدالتين $f(x), f(y)$ على التوالي وذلك بجمع الصفوف والأعمدة في الجدول التالي:

y \ x	2	4	f(y)
1	0.1	0.15	0.25
3	0.2	0.3	0.5
5	0.1	0.15	0.25
f(x)	0.4	0.6	1

من ذلك يكون

$$E(X) = \sum_{x} x\, f(x) = 2(0.40) + 4(0.60)$$

$$= 0.8 + 2.4 = 3.2$$

$$E(Y) = \sum_{y} y\, f(y) = 1(0.25) + 3(0.50) + 5(0.25)$$

$$= 0.25 + 1.5 + 1.25 = 3.0$$

$$E(X+Y) = \sum_{X} \sum_{Y} (x+y)\, f(x+y)$$

$$= (2+1)(0.10) + (2+3)(0.20) + 2+5)(0.1)$$

$$+ (4+1)(0.15) + (4+3)(0.3) + (4+5)(0.25)$$

$$= 0.03 + 1.00 + 0.70 + 0.75 + 2.10 + 1.35 = 6.2$$

$$= E(X) + E(Y) = 3.2 + 3.0 + 6.2$$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y)$$

$$= 2(3.2) - 3(3.0) = 2.6$$

وحيث إن X, Y متغيران مستقلان فإن:

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

$$= (3.2)(3.0) = 9.6$$

مثال ٢,٣,٤

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X الذي يخضع للقانون الاحتمالي

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}|x-2| , & x = -1, 0, 1, 3 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

الحـل:

من تعريف التوقع الرياضي لمتغير منفصل X:

$$E(X) = \sum x\ P(x) = \frac{1}{7}\left[(-1)|-1-2| + (0)|0-2| + (1)|1-2| + (3)|3-2|\right]$$

$$= \frac{1}{7}\left[-3+1+3\right] = \frac{1}{7}$$

يمكن حساب E(X) من كتابة القانون الاحتمالي P(x) على الصورة الجدولية التالية:

x	-1	0	1	3	
f(x)	3/7	2/7	1/7	3/7	
E(X)	-3/7 +	0 +	1/7 +	3/7 =	1/7

مـثـال ٣,٣,٤

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي $g(x) = 2x^2 + 1$ إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد النقط التي تظهر نتيجة رمي زهرة النرد متزنة.

الحـل:

القانون الاحتمالي الذي يعبر عن ظاهرة رمي زهرة النرد المتزنة هو:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ويكون:

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(x)\,P(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{6} (2x^2 + 1)\,.\,\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left[2\sum_{x=1}^{6} x^2 + \sum_{x=1}^{6}(1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(2)91}{6} + 6\right] = \frac{94}{3}$$

.

لاحظ أننا استخدمنا الحقيقة $\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}$

مـثـال ٤ , ٣ , ٤

كان لدينا ثلاث قطع نرد؛ الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة زرقاء، وكل قطعة مرقمة من 1 إلى 6 . قمنا برمي القطع وكانت النتيجة هي إضافة ضعفي الرقم الأحمر إلى الرقم الأبيض مطروحا منه الرقم الأزرق؛ فمثـلاً إذا كانت توجـد 3 أرقام بيضاء، و 4 حمراء، و 2 زرقاوين فإن النتيجة ستكــون $3 + 2(4) - 2 = 9$. إذا رميت القطع عددا كبيرا من المرات، فما متوسط وتباين نتيجة الرمي؟

الحـل:

نفرض أن X_b , X_r , X_w تمثل الأرقام الناتجة عن رمي قطعة النرد البيضاء، والحمراء، والزرقاء على التوالي. ونفرض أن Y تمثل النتيجة بعد إجراء عملية الرمي، وتكون:

$$Y = X_w + 2X_r - X_b$$

المطلوب هو إيجاد$E(Y), Var(Y)$.

نلاحظ أن

$$E(Y) = E(X_w + 2X_r + X_b) = E(X_w) + 2E(X_r) - E(X_b)$$

وحيث إن

$$E(X_i\ ,\ i = w, r, b) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{6}{6} = \frac{21}{6}$$

إذن

$$E(Y) = \frac{21}{6} + 2\left(\frac{21}{6}\right) - \frac{21}{6} = \frac{21}{3} = 7$$

من تعريف التباين نجد أن:

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E(X_w + 2X_r - X_b)^2 \\ &= E(X_w^2) + 4E(X_r^2) + E(X_b^2) + 4E(X_w X_r) - 2E(X_w X_b) - 4E(X_r X_b) \\ &= E(X_w^2)+4E(X_r^2)+E(X_b^2)+4E(X_w).E(X_r)-2E(X_w).E(X_b)-4E(X_r).E(X_b) \end{aligned}$$

وحيث إن

$$E(X_i^2\ ,\ i = w, r, b) = 1.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 9.\frac{1}{6} + 16.\frac{1}{6} + 25.\frac{1}{6} + 36.\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

إذن

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \frac{91}{6} + 4.\frac{91}{6} + \frac{91}{6} + 4.\frac{21}{6}.\frac{21}{6} - 2\frac{21}{6}.\frac{21}{6} - 4\frac{21}{6}.\frac{21}{6} \\ &= \frac{91}{6} + \frac{364}{6} + \frac{91}{6} + 49.\frac{49}{2} - 49 = \frac{133}{2} \end{aligned}$$

ومن ذلك ينتج أن

$$Var(Y) = \frac{133}{2} - (7)^2 = 17.5$$

٤ , ٤ التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المتصلة

ندرس في هذا البند التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المتصلة بموازاة لما قمنا بعمله في البند السابق فيما يخص المتغيرات العشوائية المنفصلة.

تعريف ١ , ٤ , ٤

التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المتصل X، ويرمز له بالرمز E(X)، ويعرّف بالصيغة الرياضية التالية:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

بشرط أن يكون التكامل موجودًا، و f(x) دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل X.

مثال ١ , ٤ , ٤

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المتصل X بدالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) \;, & 0 < x < 1 \\ 0 \;, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

الحل:

من تعريف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل نحصل على:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} x\,(1-x)\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

مثال ٢ , ٤ , ٤

إذا كانت دالة الكثافة للمتغير العشوائي المتصل X معطاة بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi\left(1+x^2\right)} , & 0 < x < 1 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المتصل X.

الحل:

من تعريف التوقع الرياضي نجد أن:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{4x}{\pi\left(1+x^2\right)}\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}\ln(2)$$

مثال ٣ , ٤ , ٤

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير المتصل X إذا كانت دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} , \quad |x| > 1$$

الحـل:

من تعريف التوقع الرياضي لمتغير متصل X نجد أن:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{|x|>1} \frac{|x|}{2x^2}\, dx$$

$$= \int_{|x|>1} \frac{1}{2|x|}\, dx = \infty$$

إذن $E(X)$ غير معرّفة، لذلك يمكن القول إن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المتصل X بدالة الكثافة $f(x) = \frac{1}{2x^2}$, $|x| > 1$ ليست موجودة.

٤ , ٥ التوقع الرياضي لدالة في المتغيرات العشوائية المتصلة

كما هو الحال في المتغير العشوائي المنفصل، يمكن تعريف التوقع الرياضي لدالة المتغير العشوائي المتصل.

تعريف ٤ , ٥ , ١

إذا كانت $H(X)$ دالة في المتغير العشوائي المتصل X الذي دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$؛ فإن القيمة المتوقعة للدالة $H(X)$ تعطى بالصيغة التالية:

$$E\left[H(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\, f(x)\, dx$$

بشرط وجود التكامل.

مثال ١ , ٥ , ٤

من المثال ١ , ٤ , ٤ أوجد القيمة المتوقعة للدالة H(X) حيث إن:

$$H(X) = 2X - 1 \quad , \quad H(X) = X^2$$

الحل:

من التعريف (١ , ٥ , ٤) السابق نجد أن

$$E[H(X)] = E(2x-1) = \int_{-\infty}^{\infty} (2x-1)\, f(x)\, dx$$

$$= 2\int_{1}^{2} (2x-1)(1-x)\, dx$$

$$= 2\int_{1}^{2} (-2x^2 + 3x - 1)\, dx$$

$$= 2\left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= 2\left[\frac{-16}{3} + 6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1\right]$$

$$= 2\left[-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{-7}{3}$$

الآن وبنفس الطريقة يمكن إيجاد:

$$E[H(X)] = E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2)\, f(x)\, dx$$

$$= 2\int_1^2 (X^2)(1-x)\, dx$$

$$= 2\int_1^2 (x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 2\left[\frac{-x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= 2\left[\frac{-16}{4} + \frac{8}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= 2\left[-\frac{7}{3} - \frac{15}{4}\right] = \frac{-17}{6}$$

مثال ٢ , ٥ , ٤

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا له دالة كثافة احتمال معطاة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & 0 < x < 1 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي $Y=e^X$.

الحل:

من تعريف التوقع الرياضي لدالة المتغير العشوائي المتصل نحصل على:

$$E(Y) = E(e^X) = \int_0^1 e^X\, dx = e - 1$$

مثال ٣ , ٥ , ٤

إذا كانت f(x) دالة كثافة للمتغير العشوائي المتصل X معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} , & 0 < x < 1 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد $E[H(X)]$ حيث إن $H(X) = e^{\frac{3x}{4}}$.

الحـل:

$$E[H(X)] = E\left(e^{\frac{3x}{4}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} H(X)\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{\frac{3x}{4}}\, e^{-x}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-x}{4}}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} e^{\frac{-x}{4}}\, dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} -4\, e^{\frac{-x}{4}} \Big|_{0}^{t} = 4$$

مثال ٤ , ٥ , ٤

إذا كانت f(x) دالة كثافة احتمال معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - x) , & 0 < x < 1 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأثبت أن
$$E(X^r) = \frac{2}{(r+1)(r+2)}$$

الحل

$$E(X^r) = \int_0^1 2x^r (1 - x)\, dx$$

$$= 2\int_0^1 \left(x^r - x^{r+1}\right) dx$$

$$= 2\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{x^{r+2}}{r+2}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{(r+1)(r+2)}$$

مثال ٥ , ٥ , ٤

إذا كانت دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين X, Y معرفة كالتالي:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x + 2y) , & 0 < x < 1 , \; 1 < y < 2 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد $E[H(X,Y)]$، حيث إن $H(X,Y) = \frac{X}{Y^3}$.

الحـل:

$$E\left(\frac{X}{Y^3}\right) = \int_1^2 \int_0^1 \frac{2}{7}\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{2x}{y^2}\right) dx\, dy$$

$$= \frac{2}{7}\int_1^2 \frac{x^3}{3y^3} + \frac{2x^2}{2y^2}\Bigg]_0^1 dy = \frac{2}{7}\int_1^2 \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{y^2}\, dy$$

$$= \frac{2}{7}\int_1^2 \frac{y^{-3}}{3} + y^{-2}\, dy = \frac{2}{7}\left[\frac{1}{3}\,\frac{y^{-2}}{-2} + \frac{y^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{7}\left[-\frac{1}{6y^2} - \frac{1}{y}\right]_1^2 = -\frac{2}{7}\left[\frac{1+6y}{6y^2}\right]_1^2 = \frac{15}{84}$$

ملاحظة ٤,٥,١

يمكن ملاحظة أن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل له نفس خواص التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل المبينة في البند الثالث من هذا الفصل. أما إثبات هذه الخواص، في حالة المتغير المتصل، فتتم كما هي في حالة المتغير المنفصل مع استبدال علامة الجمع بعلامة التكامل $\left(\int \right)$.

مثال ٤,٥,٦

إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين لهما دالة كثافة مشتركة f(x , y)

معطاة بالعلاقة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(1+3y^2)}{4} \ , & 0 < x < 2 \ , \ 0 < y < 1 \\ 0 \ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد $E(X), E(Y), E(X+Y), E(XY)$.

الحـل:

نلاحظ أنه لإيجاد $E(X), E(Y)$ فإننا نحتاج إلى الدوال الهامشية لكل من المتغيرين X, Y ؛ أي نريد إيجاد الدوال $f(x), f(y)$ على التوالي.
من تعريف الدوال الهامشية نحصل على:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4}\, dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[xy + xy^3\right]_0^1 = \frac{x}{2} \ , \ 0 < x < 2$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} + 3xy^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(1+3y^2\right) \ , \ 0 < y < 1$$

من تعريف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل نحصل على:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{x \cdot x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} y\,(1+3y^2)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2} + \frac{3y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right] = \frac{5}{8}$$

من تعريف التوقع الرياضي لدالة المتغير العشوائي المتصل نحصل على:

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{0}^{2}\int_{0}^{1} (x+y)\, \frac{x(1+3y^2)}{4}\, dx\, dy$$

$$= \int_{0}^{2}\int_{0}^{1} \frac{x^2 + 3x^2y^2}{4}\, dx\, dy + \int_{0}^{2}\int_{0}^{1} \frac{xy + 3xy^3}{4}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{4}\left[x^2y + x^2y^3\right]_0^1 dx + \int_0^2 \frac{1}{4}\left[\frac{xy^2}{2} + \frac{3xy^4}{4}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{4}\left[2x^2\right] dx + \int_0^2 \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2} + \frac{3x}{4}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{8}\right]_0^2 = \frac{47}{24}$$

إذن

$$E(X+Y) = \frac{47}{24}$$

من الملاحظ أنه يمكننا إيجاد القيمة المتوقعة $E(X+Y)$ بطريقة مباشرة وذلك باستخدام خواص التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية كمايلي:
من خواص التوقع الرياضي نجد أن

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{4}{3} + \frac{5}{8} = \frac{32+15}{24} = \frac{47}{24}$$

وبالمثل لإيجاد $E(XY)$ يمكننا استخدام أي من الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى: استخدام تعريف التوقع الرياضي لدالة المتغير العشوائي المتصل

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\, \frac{x(1+3y^2)}{4}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 \frac{x^2y + 3x^2y^3}{4}\, dy\, dx = \int_0^2 \frac{1}{4}\left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{3x^2y^4}{4}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{4}\left(\frac{5x^2}{4}\right) dx = \frac{1}{4}\left[\frac{5x^3}{12}\right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

الطريقة الثانية: كما ذكرنا؛ إننا باستخدام التوقع الرياضي لأي متغيرين عشوائيين مستقلين X, Y:

$$E(XY) = E(X).E(Y) = \frac{4}{3}.\frac{5}{8} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

٦ , ٤ حساب التغاير لمتغيرين عشوائيين

ندرس في هذا البند مفهوم التغـايـر (covariance) بين متغيرين عشوائيـين تنطبق على التوقع للمتغيرات العشوائية. يعطي التغاير بين متغيرين عشوائيين X, Y مقياسًا عدديًا يبين مدى تغاير المتغيرين من حيث إنهما قد يزدادان مـعًا أو ينقصان معاً. يرمز لتغاير متغيرين X, Y بالرمز σ_{XY} أو $\text{cov}(X, Y)$.

تعريف ١ , ٦ , ٤

يعرف التغاير بين المتغيرين العشوائـيـين X, Y بالقيمة المتوقعة لحاصـل ضرب $[X - E(X)][Y - E(Y)]$، أي أن:

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

نلاحظ أن

$$
\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\
&= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}
$$

أي يمكن كتابة تغاير المتغيرين X, Y على الصورة التالية:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

مثال ١,٦,٤

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين ويعبران عن اتجاه الزيادة أو النقص في أسعار أسهم بنكين A, B في المملكة العربية السعودية. يملك كل بنك نسبة محددة من أسهم البنك الآخر. المتغير $X = 1$ يعني أن أسعار أسهم البنك A في تزايد، وأن $X = 0$ تعني أن أسعار أسهمه في تناقص. بالمثل فإن $Y = 1$ تعني أن أسعار أسهم البنك B في تزايد وأن $Y = 0$ تعني أن أسعار أسهمه في تناقص. يوضح الجدول التالي التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X, Y:

x / y	0	1	المجموع
0	0.3	0.1	0.4
1	0.05	0.55	0.6
المجموع	0.35	0.65	1

لاحظ أن $P(X=1, Y=1)$ يعبر عن احتمال أن تزداد أسعار أسهم البنكين معًا، وأن $P(x=0,y=0)$ هو احتمال أن تنقص أسعار أسهم البنكين معًا. المطلوب حساب التغاير بين X, Y.

الحل:

من تعريف التغاير بين X, Y الذي ينص على

$$Cov(X , Y) = \left[X - E(X)\right]\left[Y - E(Y)\right]$$

أي أننا نحتاج لحساب قيم كل من$E(X)$ و $E(Y)$ و $E(X , Y)$.

نلاحظ أن

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x} x\, P(X = x) \\ &= (0)(0.35) + (1)(0.65) \\ &= 0.65 \end{aligned}$$

كما نجد أن

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y} y\, P(Y = y) \\ &= (0)(0.40) + (1)(0.60) \\ &= 0.60 \end{aligned}$$

أما التوقع المشترك للمتغيرين فهو

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x,y} xy\, P(X = x, Y = y) \\ &= (0)(0)(0.3) + (1)(0)(0.1) + (0)(1)(0.05) + (1)(1)(0.55) \\ &= 0.55 \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن التغاير المطلوب هو

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.55 - (0.65)(0.6)$$
$$= 0.16$$

مثال ٢,٦,٤

أوجد التغاير بين X, Y في المثال السابق إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي المشترك لهما هو كمايلي:

y \ x	0	1	المجموع
0	0.05	0.55	0.60
1	0.30	0.10	0.40
المجموع	0.35	0.65	1.00

الحـل:

نحسب أولا قيم $E(X)$ و $E(Y)$ و $E(X, Y)$ من الجدول كمايلي:

$$E(X) = 0.65 \ , \ E(Y) = 0.40 \ , \ E(X, Y) = 0.10$$

وبذلك يكون التغاير هو

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X, Y) - E(X)E(Y)$$
$$= 0.10 - (0.65)(0.40)$$
$$= -0.16$$

أي أن التغاير بين أسعار أسهم البنكين سالب.

٤,٧ خواص التغاير

سنورد في هذا البند مجموعة من خصائص التغاير مع براهينها.

الخاصية ٤,٧,١

التغاير بين المتغيرين X , Y هو نفس التغاير بين المتغيرين Y , X ؛ أي أن:

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

الخاصية ٤,٧,٢

التغاير بين أي متغير ونفسه هو تباين ذلك المتغير؛ أي أن

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$$

البرهـان:

لإثبات الخاصية ٤,٧,٢ نعوض في أي صورة من صور التغاير وذلك بوضع X عوضاً عن Y أي أن:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, X) &= E(XX) - E(X)E(X) \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \text{Var}(X) \end{aligned}$$

الخاصية ٤,٧,٣

التغاير بين المتغير العشوائي وأي مقدار ثابت يساوي صفراً؛ أي أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي X ومقدار ثابت a فإن

$$\text{Cov}(X, a) = 0$$

البرهـان:

من تعريف التغاير بين متغيرين X, Y نجد أن:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

بوضع $Y = a$ (أي نضع Y مساوية للعدد الثابت a) نحصل على:

$$\begin{aligned} Cov(X, a) &= E(aX) - E(X)E(a) \\ &= aE(X) - aE(X) \\ &= a[E(X) - E(X)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

الخاصية ٤ , ٧ , ٤

إذا كانت a, b ثابتين فإن

$$Cov(aX, bY) = ab\, Cov(X, Y)$$

البرهـان:

لإثبات هذه الخاصية نضع $X = aX\ ,\ Y = bY$ في العلاقة التالية:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

ويكون

$$\begin{aligned} Cov(aX, bY) &= E(aXbY) - E(aX)E(bY) \\ &= ab\, E(XY) - aE(X)\, bE(Y) \\ &= ab\, E(XY) - ab\, E(X)E(Y) \\ &= ab\left[E(XY) - E(X)E(Y)\right] \\ &= ab\, Cov(X, Y) \end{aligned}$$

الخاصية ٥ , ٧ , ٤

إذا كانت X_1, X_2, Y متغيرات عشوائية فإن:

$$Cov(X_1 + X_2 , Y) = Cov(X_1 , Y) + Cov(X_2 , Y)$$

البرهـان:

إذا كانت $X = X_1 + X_2$ فمن تعريف التغاير بين المتغيرين X, Y نحصل على

$$\begin{aligned} Cov(X , Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E\left[(X_1 + X_2)Y\right] - E(X_1 + X_2)E(Y) \\ &= E(X_1 Y + X_2 Y) - E\left[E(X_1)E(Y) + E(X_2)E(Y)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X , Y) &= E(X_1 Y) + E(X_2 Y) - E(X_1)E(Y) - E(X_2)E(Y) \\ &= \left[E(X_1 Y) - E(X_1)E(Y)\right] + \left[E(X_2 Y) - E(X_2)E(Y)\right] \\ &= Cov(X_1 , Y) + Cov(X_2 , Y) \end{aligned}$$

ملاحظة ٤,٧,١

يمكن تعميم الخاصية ٤,٧,٥ كما يلي:

إذا كان لدينا n من المتغيرات العشوائية، ومجموع هذه المتغيرات هو

$$X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ولدينا أيضاً مجموعة أخرى m من المتغيرات العشوائية $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ مجموعها هو

$$Y_1 + Y_2 + ... + Y_m = \sum_{j=1}^{m} Y_j$$

فيمكن وصف التغاير بين $\sum_{j=1}^{m} Y_j$, $\sum_{i=1}^{n} X_i$ بالعلاقة التالية:

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n}X_i \ , \ \sum_{j=1}^{m}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{m}Cov(X_i \ , \ Y_j)$$

وهذه هي الصورة العامة للخاصيـة ٤,٧,٥ ؛ فـمـثـلاً إذا كان لدينا المتغـيـرات $X_1+X_2+X_3, Y_1+Y_2$ فإن التغاير بين هذه المتغيرات طبقًا للعلاقة السابقة هو:

$$Cov(X_1+X_2+X_3 \ , \ Y_1+Y_2) = Cov(X_1,Y_1)+Cov(X_1,Y_2)+Cov(X_2,Y_1)$$
$$+Cov(X_2,Y_2)+Cov(X_3,Y_1)+Cov(X_3,Y_2)$$

وبصورة مختصرة نكتب

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{3}X_i \ , \ \sum_{j=1}^{2}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{3}\ \sum_{j=1}^{2}Cov(X_i \ , \ Y_j)$$

الخاصية ٤,٧,٦

إذا كان $X_2 \ , \ X_1$ متغيرين عشـــوائيين مستقلـــين، فإن التغاير بينهما يساوي صفرًا؛ أي أن:

$$Cov(X_1 \ , \ X_2)=0$$

البرهـان:

من تعريف التغاير نكتب

$$Cov(X_1 \ , \ X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)$$

وحيث إن المتغيرين $X_2 \ , \ X_1$ مستقلان، فإن $E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$، ومن ذلك نجد أن

$$Cov(X_1 \ , \ X_2)=E(X_1)E(X_2)-E(X_1)E(X_2)=0$$

٤ , ٨ تباين مجموع أو طرح متغيرين عشوائيين

ندرس في هذا البند تباين مجموع أو طرح متغيرين عشوائيين، لا يكونان متصلين، ونورد على ذلك مثالا.

تعريف ١ , ٨ , ٤

إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين، فإن تباين مجموعهما، ويرمز له بالرمز $Var(X+Y)$، ويعطى بالعلاقة

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X , Y)$$

ويمكن الحصول على هذه العلاقة الرياضية من تعريف التباين والتغاير فنجد أن:

$$\begin{aligned}
Var(X_1 + X_2) &= E(X_1 + X_2)^2 - \left[E(X_1 + X_2)\right]^2 \\
&= E\left(X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2\right) - \left[E(X_1) + E(X_2)\right]^2 \\
&= E\left(X_1^2\right)+E\left(X_2^2\right)+2E(X_1X_2) - \left[E(X_1) + E(X_2)\right]^2 \\
&= E\left(X_1^2\right)+E\left(X_2^2\right)+2E(X_1X_2)-\left[E(X_1)\right]^2-\left[E(X_2)\right]^2-2E(X_1)E(X_2) \\
&= \left[E\left(X_1^2\right)-\left[E(X_1)\right]^2\right]+\left[E\left(X_2^2\right)-\left[E(X_2)\right]^2\right]+2\left[E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)\right] \\
&= Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov\,(X_1 , X_2)
\end{aligned}$$

تعريف ٢ , ٨ , ٤

لأي متغيرين عشوائيين X, Y يمكن تعريف تباين حاصل طرحهما بالصيغة

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$$

ملاحظة ١ ,٨ ,٤

في حالة استقلال متغيرين، فإن التغاير بينهما يساوي صفرًا؛ أي أن

$$Cov(X , Y) = 0$$

لاحظ أنه يمكن كتابة تباين مجموع متغيرين عشوائيين مستقلين X, Y على الصورة التالية:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

وبالمثل يمكن كتابة تباين حاصل طرح متغيرين عشوائيين، مستقلين على الصورة التالية:

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$$

من الملاحظ أنه في حالة استقلال متغيرين عشوائيين، فإن تباين مجموعهما يساوي تباين حاصل طرحهما، ويساوي تباين المتغير الأول زائد تباين المتغير الثاني؛ أي أن

$$Var(X + Y) = Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$$

مثال ١ ,٨ ,٤

إذا كان الجدول التالي يعبر عن التوزيع الاحتمالي للمتغيرين العشوائيين X, Y حيث إن المتغيرين يمثلان مبيعات محلين تجاريين A, B على الترتيب بآلاف الريالات

y \ x	0	1	2	3	المجموع
0	0.10	0.20	0.25	0.05	0.60
1	0.05	0.10	0.10	0.05	0.30
2	0.01	0.01	0.05	0.03	0.10
المجموع	0.16	0.31	0.40	0.13	1.00

فأوجد مايلي :

(أ) القيمة المتوقعة للمتغيرين X ، X^2.

(ب) القيمة المتوقعة للمتغيرين Y ، Y^2 .

(جـ) التغاير بين X، Y .

(د) تباين $X+Y$.

(هـ) تباين $X-Y$.

الحـل:

(أ)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x\,P(X=x) \\ &= (0)(0.16) + (1)(0.31) + (2)(0.40) + (3)(0.13) \\ &= 0 + 0.31 + 0.80 + 0.39 \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

كذلك يمكن إيجاد

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_x x^2\,P(X=x) \\ &= (0)(0.16) + (1)(0.31) + (4)(0.40) + (9)(0.13) \\ &= 0 + 0.31 + 1.60 + 1.17 \\ &= 3.08 \end{aligned}$$

(ب) نحسب

$$E(Y) = \sum_{y} y\, P(Y=y)$$

$$= 0.50$$

$$E(Y^2) = \sum_{y} y^2\, P(Y=y)$$

$$= 0.70$$

(جـ) لحساب التغاير نحسب

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)\, E(Y)$$

ولذا فإنه لحساب $E(XY)$ نستخدم جدول توزيع الاحتمال فنجد أن

$$E(XY) = \sum xy\, P(X=x, Y=y)$$

$$= 0.10 + 0.02 + 0.20 + 0.20 + 0.15 + 0.18$$

$$= 0.85$$

وبالتالي فإن:

$$Cov(X, Y) = 0.85 - (1.5)(0.50)$$

$$= 0.85 - 0.75$$

$$= 0.10$$

(د) لحساب تباين $X + Y$ نكتب

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\, Cov(X, Y)$$

من الفقرتين (أ)، (ب) نجد أن

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 3.08 - 2.25$$

$$= 0.83$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= 0.70 - 0.25 \\ &= 0.45 \end{aligned}$$

ومن ذلك والفقرة (جـ) نجد أن:

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= 0.83 + 0.45 + 2 \text{ x } 0.10 \\ &= 1.48 \end{aligned}$$

(هـ) أما تباين الفرق بين X ، Y فيمكن استخدام الفقرتين (جـ)، (د) فنجد أن

$$\begin{aligned} Var(X - Y) &= Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X , Y) \\ &= 0.83 + 0.45 - 2(0.10) \\ &= 1.08 \end{aligned}$$

٤ , ٩ معامل الارتباط لمتغيرين عشوائيين

يقيس معامل الارتباط بين متغيرين قوة العلاقة بينهما بعد أن تأكد لـنـا أن بينهما علاقة خطية.

تعريف ٤ , ٩ , ١

إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين تباينهما Var(X), Var(Y) على التوالي فإن معامل الارتباط (Correlation Coeffeicient) بـين المتغيرين X, Y، يرمز له بالرمز ρ_{XY} أو Corr(X , Y)، ويعرف بالصيغة التالية:

$$\rho_{XY} = Corr(X , Y) = \frac{E[X - E(X)][Y - E(Y)]}{\sqrt{Var(X)\, Var(Y)}}$$

نلاحظ أن البسط فـي العلاقـة هـو تغاير المتغيـريـن X, Y، الذي يرمز له بالرمز Cov (X, Y)، والمقام هو الجذر التربيعي الموجب لحاصل ضرب تباين المتغيرين X, Y الذي يمثل حاصل ضرب الانحراف المعياري للمتغيرين، ويرمز له بالرمز $\sigma_X \sigma_Y$، عندئذ يمكن كتابة معامل الارتباط بصورة مكافئة

$$\text{Corr}(X\,,\,Y) = \frac{\text{Cov}(X\,,\,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

والآن نعطي ثلاثة أمثلة لتوضيح كيفية حساب معامل الارتباط.

مـثـال ١ , ٩ , ٤

أوجد معامل الارتباط بين X , Y في بيانات المثال (١ , ٦ , ٤) التالية:

y \ x	0	1	المجموع
0	0.30	0.10	0.40
1	0.05	0.55	0.60
المجموع	0.35	0.65	1.00

الحـل:

سبق أن وجدنا في حل المثال أن

$$E(X) = 0.65 \quad , \quad E(Y) = 0.60 \quad , \quad \text{Cov}(X\,,\,Y) = 0.16$$

ولحساب معامل الارتباط نحتاج لمعرفة تباين المتغيرين X، Y .

نحسب أولا

$$E(X^2) = \sum x^2 p_x$$
$$= 0.65$$

$$E(Y^2) = \sum y^2 p_y$$
$$= 0.60$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= 0.65 - 0.4225$$
$$= 0.2275$$

$$\sigma_y^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$
$$= 0.60 - 0.36$$
$$= 0.24$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X , Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$
$$= \frac{0.16}{\sqrt{(0.2275)(0.24)}}$$
$$= 0.68$$

وهو معامل ارتباط موجب بين المتغيرين X، Y .

مثـال ٢ , ٩ , ٤

أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين X , Y من بيانات المثال ٢ , ٦ , ٤ التالية:

y \ x	0	1	المجموع
0	0.05	0.55	0.60
1	0.30	0.10	0.40
المجموع	0.35	0.65	1.00

الحـل:

كما في المثال السابق، نلاحظ أنه في حل المثال ٢ , ٦ , ٤ أوجدنا كلا من:

$$E(X) = 0.65 \quad , \quad E(Y) = 0.40 \quad , \quad Cov(X , Y) = -0.16$$

ولحساب معامل الارتباط نجد أولا مايلي:

$$E(X^2) = 0.65 \quad , \quad E(Y^2) = 0.40$$

ومن ذلك يكون التباين لكل من المتغيرين هو:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 0.65 - 0.4225 \\ &= 0.2275\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= 0.40 - 0.16 \\ &= 0.24\end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن معامل الارتباط هو:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X , Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$= \frac{-0.16}{\sqrt{(0.2275)(0.24)}}$$

$$= -0.68$$

وهذا معامل ارتباط سالب بين المتغيرين X، Y .

مـثـال ٣ , ٩ , ٤

أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين X، Y باستخدام بيانات المثال (١ , ٨ , ٤) السابق.

الحـل:

أوجدنا في المثال (١ , ٨ , ٤) مبيعات محلين تجاريين بآلاف الريالات، تباين كل من المتغيرين X، Y وتغايرهما؛ أي وجدنا أن

$$\sigma_X^2 = 0.83$$

$$\sigma_Y^2 = 0.45$$

$$\sigma_{X,Y}^2 = 0.10$$

من ذلك نجد أن معامل الارتباط هو:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$= \frac{0.10}{\sqrt{0.83} \sqrt{0.45}}$$

$$= 0.16$$

وهو معامل ارتباط موجب.

٤,١٠ خواص معامل الارتباط

يحقق معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين مجموعة من الخواص نذكر منها مايلي:

الخاصية ٤,١٠,١

معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين X,Y هو نفسه بين المتغيرين العشوائيين Y,X، وهذا يعني أن معامل الارتباط وحيد ومتماثل؛ أي أن:

$$\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X} .$$

الخاصية ٤,١٠,٢

إذا أضفنا بعض القيم للمتغيرين أو ضربنا المتغيرين بقيم لها نفس الإشارة، فإن معامل الارتباط يبقى ثابتاً لايتأثر؛ أي أن:

(أ) لجميع قيم b , a يكون $\rho_{X \pm a, Y \pm b} = \rho_{XY}$

(ب) لجميع قيم b , a بحيث $ab > 0$ يكون $\rho_{aX \; bY \pm b} = \rho_{XY}$

الخاصية ٤,١٠,٣

معامل الارتباط هو قيمة عددية تقع في الفترة المغلقة [1 , 1-] ؛ أي أن $-1 \leq \rho \leq 1$ هذه الخاصية من الخواص المهمة لمعامل الارتباط حيث تفيد في تحديد مقدار معامل الارتباط بين المتغيرين واتجاهه؛ ولذا سوف نقوم بإثبات هذه الخاصية.

البرهان

من المعروف أنه إذا كان لدينا متغير X متوسطه E(X)، وانحرافه المعياري $\sqrt{Var(X)}$ فإن المتغير Z يسمى بالمتغير المعياري ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

نفرض أن لدينا المتغيرين X , Y ويمكن وضعهما في الصورتين المعياريتين التاليتين:

$$Z_1 = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \quad , \quad Z_2 = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}$$

من الواضح أن $E(Z_1) = E(Z_2) = 0$ و $Var(Z_1) = Var(Z_2) = 0$.

من تعريف تباين مجموع متغيرين نجد أن:

$$Var(Z_1 + Z_2) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + 2Cov(Z_1 , Z_2)$$

ومن تعريف تغاير متغيرين

$$Cov(Z_1 , Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = E(Z_1 Z_2)$$

$$= \frac{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}}{\sqrt{Var(X)}\ \sqrt{Var(Y)}}$$

$$= \rho$$

إذن $Var(Z_1 + Z_2) = 1 + 1 + 2\rho = 2(1 + \rho)$

وحيث إن $Var(Z_1 + Z_2) \geq 0$

فينتج أن $2(1 + \rho) \geq 0$

إذن $\rho \geq -1$ (١)

وبالمثل $Var(Z_1 - Z_2) = 2(1 + \rho)$

وحيث إن $Var(Z_1 - Z_2) \geq 0$

فإن $2(1 - \rho) \geq 0$

إذن $\rho \leq -1$ (٢)

من (١)، (٢) نحصل على أن

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

الخاصية ٤ , ١٠ , ٤

معامل الارتباط لمتغير مع نفسه يساوي الواحد الصحيح؛ أي أن:

$$\text{Corr}(X\,,X) = \rho_{X,X} = 1$$

وذلك لأن
$$\text{Corr}(X\,,\,Y) = \frac{\text{Cov}(X\,,\,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}$$

إذا وضعنا $Y = X$ نحصل على
$$\text{Corr}(X\,,X) = \frac{\text{Cov}(X\,,X)}{\sigma_X\,\sigma_X} = 1$$

حيث إن التغاير للمتغير X مع نفسه هو تباين X؛ أي أن:

$$\text{Corr}(X\,,X) = \text{Var}\,(X)$$

الخاصية ٥ , ١٠ , ٤

إذا كان $X\,,Y$ متغيرين عشوائيين مستقلين، فإن قيمة معامل الارتباط بينهما تساوي صفرًا؛ أي أن $\text{Corr}\,(X, Y) = 0$. يجب ملاحظة أن عكس هذه الخاصية ليس صحيحا، وهذا يعني أنه إذا كان معامل الارتباط صفرا فإن ذلك لايعد شرطا كافيا للاستقلال.

مثال ١ , ١٠ , ٤

من دالة الاحتمال المشترك للمتغيرين العشوائيين X, Y الموضحة بالجدول التالي، أوجد

$$\text{Var}\,(X)\ ,\ \text{Var}\,(Y)\ ,\ \text{Cov}\,(X\,,Y)\ ,\ \rho_{XY}.$$

y / x	0	1	2	3	f(x)
0	0.05	0.05	0.10	0.00	0.20
1	0.05	0.10	0.25	0.10	0.50
2	0.00	0.15	0.10	0.05	0.30
f(y)	0.10	0.30	0.45	0.15	1.00

الحـل:

من تعريف التوقع الـريـاضـي نـحـصـل عـلـى

$$E(X) = \sum_{x} x\, f(x) = (0)(0.20) + (1)(0.50) + (2)(0.30)$$

$$= 0 + 0.50 + 0.60 = 1.10$$

$$E(Y) = \sum_{y} y\, f(y) = (0)(0.10) + (1)(0.30) + (2)(0.45) + (3)(0.15)$$

$$= 0 + 0.30 + 0.90 + 0.45 = 1.65$$

$$E(X^2) = \sum_{x} x^2\, f(x) = (0)(0.20) + (1)(0.50) + (4)(0.30)$$

$$= 0 + 0.50 + 1.20 = 1.70$$

$$E(Y^2) = \sum_{y} y^2\, f(y) = (0)(0.10) + (1)(0.30) + (4)(0.45) + (9)(0.15)$$

$$= 0 + 0.30 + 1.80 + 1.35 = 3.45$$

إذن

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.70 - (1.10)^2 = 0.49$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3.45 - (1.65)^2 = 0.49$$

والآن نجد أن:

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_x \sum_y xy\, f(x\,,\,y) \\
&= 1(0.10) + 2(0.15) + 2(0.25) + 4(0.10) + 3(0.10) + 6(0.05) \\
&= 0.10 + 0.30 + 0.50 + 0.40 + 0.30 + 0.30 \\
&= 1.9
\end{aligned}
$$

فعليه يكون من تعريف التغاير:

$$
\begin{aligned}
Cov(X\,,\,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= 1.9 - (1.10)(1.65) = 0.085
\end{aligned}
$$

ومن تعريف معامل الارتباط نحصل على

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{Cov(X\,,\,Y)}{\sqrt{Var(X)}\ \sqrt{Var(Y)}} \\
&= \frac{0.085}{\sqrt{(0.49)}\ \sqrt{(0.7275}} = \frac{0.085}{0.595} \\
&= 0.14
\end{aligned}
$$

مثال ٢, ١٠, ٤

إذا كان Y_2 , Y_1 متغيرين عشوائيين منفصلين لهما دالة احتمال مشتركة موضحة في الجدول التالي:

Y_2 \ Y_1	-1	0	1
-1	1/16	3/16	1/16
0	3/16	0	3/16
1	1/16	3/16	1/16

فأثبت أن المتغيرين Y_1 , Y_2 غير مستقلين وتغايرهما يساوي صفرا.

الحـل:

الدوال الهامشية للمتغير العشوائي Y_1 هي مجموعة الأعمدة في الجدول الاحتمالي، والدوال الهامشية للمتغير العشوائي Y_2 هي مجموعة الصفوف في الجدول الاحتمالي، فعليه يمكن حساب الدوال الهامشية للمتغـيريـن Y_1 , Y_2 كالتالي:

$$f_1(-1) = f_2(-1) = \frac{5}{16}$$

$$f_1(0) = f_2(0) = \frac{6}{16}$$

$$f_1(1) = f_2(1) = \frac{5}{16}$$

فمثلاً لو أخذنا $f(-1 , -1) = \frac{1}{6}$، فإنه من الواضح أن $f(-1 , -1) \neq f_1(-1)\, f_2(-1)$ وهذا كاف لإثبات أن المتغـيريـن Y_1 , Y_2 غير مستقلين.

لإثبات أن تغاير المتغيرين Y_1 , Y_2 يساوي صفراً فإنه يلزمنا أولا إيجاد:

$$E(Y_1) = \sum_{y_1} y_1\, f(y_1) = -1\left(\frac{5}{16}\right) + 0\left(\frac{6}{16}\right) + 1\left(\frac{5}{16}\right) = 0$$

$$E(Y_2) = \sum_{y_2} y_2\, f(y_2) = -1\left(\frac{5}{16}\right) + 0\left(\frac{6}{16}\right) + 1\left(\frac{5}{16}\right) = 0$$

$$E(Y_1 , Y_2) = \sum_{y_1} \sum_{y_2} y_1 y_2\, f(y_1, y_2) = (-1)(-1)\left(\frac{1}{16}\right) + 0(-1)\left(\frac{3}{16}\right) + \ldots + (1)(1)\left(\frac{1}{16}\right)$$

ويكون

$$Cov(Y_1 Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = 0$$

يؤكد هذا المثال أنه إذا كان التغاير بين متغيرين يساوي صفراً، فليس من الضروري أن يكون المتغيران مستقلين.

مثال ٣,١٠,٤

إذا كانت $f(x, y)$ دالة كثافة احتمال مشتركة معطاة كالتالي:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3} \ , & 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 2 \\ 0 \ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد مايلي $Var(X)$, $Var(Y)$, $Corr(X, Y)$

الحل:

من تعريف الدوال الهامشية نحصل على:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy = 2x^2 + \frac{2x}{3}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{y}{6}$$

من تعريف التوقع الرياضي نحصل على

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x\left(2x^2 + \frac{2x}{3}\right) dx = \frac{13}{18}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\, dy = \int_0^2 y\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{6}\right) dy = \frac{10}{6}$$

من تعريف التباين والتغاير نكتب:

$$\mathrm{Var}(X) = E[X - E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)\, dx = \int_0^1 \left(x - \frac{13}{18}\right)^2 \left(2x^2 + \frac{2x}{3}\right) dx = \frac{73}{1620}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E[Y - E(Y)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 f(y)\, dy = \int_0^1 \left(y - \frac{10}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{6}\right) dy = \frac{26}{81}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \left(x - \frac{13}{18}\right)\left(x - \frac{10}{9}\right)\left(x^2 - \frac{xy}{3}\right) dy\, dx\end{aligned}$$

أي أن:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_0^1 \left(-\frac{2}{9}x^3 + \frac{25}{81}x^2 - \frac{26}{243}x\right) dx = -\frac{1}{162}$$

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\ \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\frac{-1}{162}}{\sqrt{\left(\frac{73}{1620}\right)\left(\frac{26}{81}\right)}} = -0.05$$

مثال ٤ , ١٠ , ٤

إذا كان Y_2 , Y_1 متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة مشتركة معطاة كما يلي:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2y_1 , & 0 \le y_1 \le 1 , \ 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد $Cov(Y_1 , Y_2)$, $Var(Y_2)$, $Var(Y_1)$, $E(Y_1 Y_2)$.

الحـل:

من تعريف التوقع الرياضي:

$$E(Y_1 Y_2) = \int_0^1 \int_0^1 y_1 y_2 \, f(y_1, y_2) \, dy_1 \, dy_2$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 y_1 y_2 \, (2y_1) \, dy_1 \, dy_2 = \int_0^1 y_2 \left. \frac{2y_1^3}{3} \right]_0^1 dy_2$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3} y_2 \, dy_2 = \frac{2}{3} \left. \frac{y_2^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

باستخدام التعريف:

$$E(Y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 \, f(y_1, y_2) \, dy_1 \, dy_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) \, dy_2 \right\} dy_1$$

لكننا نعلم أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) \, dy_2 = f(y_1)$$

ومنه يمكن كتابة

$$E(Y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1 \, f(y_1) \, dy_1$$

$$E(Y_1) = \int_0^1 \int_0^1 y_2 \, (2y_1) \, dy_1 \, dy_2$$

$$= \int_0^1 \left. \frac{2y_1^3}{3} \right]_0^1 dy_2 = \int_0^1 \frac{2}{3} \, dy_2$$

$$= \left. \frac{2}{3} \, y_2 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

وكذلك بالمثل يمكن إيجاد $E(Y_2)$

$$E(Y_2) = \int_0^1 \int_0^1 y_2 \, (2y_1) \, dy_1 \, dy_2$$

$$= \int_0^1 y_2 \left. \frac{2y_1^2}{2} \right]_0^1 dy_2 = \int_0^1 y_2 \, dy_2$$

$$= \left. \frac{y_2^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

يمكن حساب الدوال الهامشية للمتغيرين Y_1 , Y_2 كما يلي :

$$f(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 , y_2) \, dy_2 = \int_0^1 2y_1 \, dy_2 = 2y_1 \, y_2 \Big]_0^1 = 2y_1 \quad , \quad 0 \le y_1 \le 1$$

$$f(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 , y_2) \, dy_1 = \int_0^1 2y_1 \, dy_1 = y_1^2 \Big]_0^1 = 1 \quad , \quad 0 \le y_2 \le 1$$

إذن :

$$Var(Y_1) = E(Y_1^2) - [E(Y_1)]^2$$

$$E(Y_1^k) = \int_0^1 y_1^k f(y_1)\, dy_1 = \int_0^1 y_1^k\, 2y_1\, dy_1 = \frac{2y_1^{k+2}}{k+2}\Big]_0^1 = \frac{2}{k+2}$$

إذا أخذنا $k = 1$ نحصل على $E(Y_1) = \frac{2}{3}$.

وإذا أخذنا $k = 2$ نحصل على $E(Y_1^2) = \frac{1}{2}$.

ومن ذلك ينتج أن :

$$Var(Y_1) = E(Y_1^2) - [E(Y_1)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

من تعريف التغاير :

$$Cov(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)\, E(Y_2) = E(Y_1 Y_2) - \mu_1 \mu_2$$

نلاحظ مما سبق أنه لدينا

$$E(Y_2) = \frac{1}{2}\ ,\ E(Y_1) = \frac{2}{3}\ ,\ E(Y_1 Y_2) = \frac{1}{3}$$

ويكون

$$Cov(Y_1, Y_2) = \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

٤,١١ متباينة تشيبشف

إذا كان لدينا متغير عشوائي X متوسطه μ وانحرافه المعياري σ، فإنه توجد نسبة تساوي على الأقل $1 - \frac{1}{k^2}$ من X تقع بين $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$

وهذا يكافئ رياضيا مايلي :

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متوسطــه μ وانحرافه المعيــاري σ، فإنه لأي عدد حقيقي موجب k تكون العلاقةالتالية صحيحة:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

أو بعبارة أخرى:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

وتسمى هذه العلاقة بمتباينة أو متراجحة تشيبشف (Chebyshev inequality).

البرهــان

من تعريف التباين نحصل على

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

نقسم المدى إلى ثلاثة أجزاء منفصلة:

$(-\infty , \mu - k\sigma)$, $(\mu - k\sigma , \mu + k\sigma)$, $(\mu + k\sigma , \infty)$، إذن

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)\, dx + \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)\, dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

بإسقاط الحد الأوسط نحصل على:

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)\, dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

حيث إن $|x - \mu| \geq k\sigma$

فقد نجد أن $(x - \mu)^2 \geq k^2 \sigma^2$

عندما $x \geq \mu + k\sigma$ أو $x \leq \mu - k\sigma$،

فإن $(x - \mu)^2 = k^2 \sigma^2$

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} k^2\sigma^2 f(x)\,dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} k^2\sigma^2 f(x)\,dx$$

ومن ذلك ينتج أن

$$\int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} f(x)\,dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} f(x)\,dx \leq \frac{1}{k^2}$$

إذن

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} f(x)\,dx \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

وهذا يبرهن متراجحة تشيبشف

مثال ١ , ١١ , ٤

إذا كان المتغير العشوائيY يمثل عدد القادمين خلال يوم وفي فترة زمنية معينة إلى مكتب مبيعات تذاكر السفر، وكان له متوسط 20 وانحراف معياري 2. التوزيع الاحتمالي للمتغيرY الذي يمثل عدد القادمين للمكتب غير معروف. ما احتمال أن يقع Y بين $(16 , 24)$؟

الحــل:

المطلوب إيجاد الاحتمال التالي $P(16 \quad Y \leq 24)$

من متباينة تشيبشف:

$$P(\mu - k\sigma < Y < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

وحيث إن $\sigma = 2$, $\mu = 20$، فإن $\mu - k\sigma = 16$ و $\mu + k\sigma = 24$.

إذاً عند $k = 2$ نحصل على $P(16 \leq Y \leq 24) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

وهذا يعني أن احتمال عدد القادمين بين 16 , 24 هو على الأقل $\frac{3}{4}$ ؛ أي أنه توجد

نسبة تساوي على الأقل 75% من القادمين إلى المكتب تقع بين (16 , 24).
عندما $\sigma = 1$ فإن $k = 4$ ويكون:

$$P(16 \le Y \le 24) \ge 1 - \frac{1}{(4)^2} = \frac{15}{16}$$

من الملاحظ أن قيمة الانحراف المعيـاري σ تؤثر تأثيـرًا ملموسًا في الاحتمـال الواقع بـين $(\mu - k\sigma , \mu + k\sigma)$.

مثـال ٤,١١,٢

إذا كان X متغيرا عشوائيًا منفصلا له دالة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} , & x = -1 \\ \frac{6}{8} , & x = 0 \\ \frac{1}{8} , & x = 1 \end{cases}$$

وكان متوسط X هو 0 وتباينه هو $\frac{1}{4}$ وكانت$k = 2$ فإنه من متباينـــة تشيبشـف نحصل على:

$$P(|X - \mu| \ge k\sigma) = P(|X| \ge 1) = \frac{1}{4}$$

من الملاحظ أن الاحتمال السابق يحافظ على الحد العلوي $\frac{1}{4} = \frac{1}{k^2}$.

مثـال ٤,١١,٣

إذا كانت للمتغير العشوائي X دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} , & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وكانت $k = \frac{3}{2}$ ، $\sigma^2 = 1$ ، $\mu = 0$،

فإنه من متباينة تشيبشف نحصل على:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) = P\left(|X| \geq \frac{3}{2}\right) = 1 - \int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{3}}\, dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نلاحظ من النتيجة أن للاحتمال السابق حدًا علويا $\frac{4}{9} = \frac{1}{k^2}$ ،

وحيث إن $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.134$ فإن الاحتمال أقل من الحد العلوي $\frac{4}{9}$.

إذا أخذنا $k = 2$ قد نجد أيضًا أن الاحتمال $P(|X - \mu| \geq 2\sigma) = 0$ الذي هو أقل من الحد العلوي $\frac{1}{4} = \frac{1}{k^2}$ ؛ أي أن الاحتمال لم يحافظ على حده العلوي.

مثال ٤,١١,٤

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلا، وكانت f(x) دالة احتمال له معرفة كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} 630x^4\,(1 - x^4) \;,\; 0 < x < 1 \\ 0 \;,\; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد σ , μ وكذلك أوجد احتمال أن يأخذ المتغير X قيما في الفترة $(\mu - 2\sigma , \mu + 2\sigma)$؟

الحل:

من تعريف التوقع الرياضي نحصل على

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = 630 \int_0^1 x^5 \left(1 - x^4\right) dx$$

$$= 630 \int_0^1 \left(x^9 - 4x^8 + 6x^7 - 4x^6 + x^5\right) dx$$

$$= 630 \left(\frac{1}{10} - \frac{4}{9} + \frac{3}{4} - \frac{4}{7} + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{630(126 - 560 + 945 - 720 + 210)}{1260} = \frac{630}{1260} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 x^4 (1 - x)^4\, dx = \frac{1}{44}$$

ومن ذلك يمكن إيجاد أن $\sigma = \frac{1}{\sqrt{44}}$

باستخدام متباينة تشيبشف:

$$P\left(\left|X - \mu\right| \le k\sigma\right) = \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} f(x)\, dx$$

وحيث إن $k = 2$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{44}}$, $\mu = \frac{1}{2}$

فيكون

$$P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \le \frac{2}{\sqrt{44}}\right) = \int_{\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{44}}}^{\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{44}}} x^4 \left(1 - x^4\right) dx = 0.96$$

نلاحظ أنه يوجد في متباينة تشيبشف نسبة تساوي على الأقل $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{k^2}$ من X تقع في الفترة $(\mu - 2\sigma , \mu + 2\sigma)$.

مثال ٤,١١,٥

وضع مقياس لتحكم السرعة على m ميلا في الساعة. وكان X يمثل السرعة القانونية لشاحنة بها مقياس سرعة، وكان متوسط X هو $\mu = m$ وانحرافه المعياري $\sigma = 3$. إذا وضع المقياس على سرعة 45 ميلا في الساعة في منطقة حددت السرعة القانونية فيها بـ 50 ميلا في الساعة، فما احتمال تجاوز الشاحنة للسرعة القانونية؟

الحل:

حيث إن المتغير العشوائي X هو متغير عشوائي متصل يمثل السرعة القانونية

$$P(\text{الشاحنة تتجاوز السرعة القانونية}) = P(X > 50) = P(X \geq 50) \leq P(|X - 45| \geq 5)$$

إذن
$$P(|X - \mu| \geq 5) \leq \frac{\sigma^2}{5^2} = \frac{9}{25} = 0.36$$

مثال ٤,١١,٦

إذا كان عدد الأشياء المنتجة خلال أسبوع في مصنع ما هي متغير عشوائي متوسطه 50، وتباينه هو 25. فماهو احتمال أن يكون الإنتاج الأسبوعي بين 40 و 60؟

الحل:

باستخدام متباينة تشيبشف نحصل على

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = \frac{1}{4}$$

إذن

$$P(|X - 50| < 10) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

عندئذ يمكن القول أن احتمال أن يقع الإنتاج الأسبوعي بين 40 و 60 هو على الأقل 75%.

٤,١٢ تمارين

١- إذا كانت دالة الاحتمال لمتغير عشوائي منفصل X هي

$$f(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^{x} \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3$$

فأوجد $E(X)$ و $E(X^2)$.

٢- إذا كان X متغيرًا عشوائيًا بدالة توزيع احتمالي كما في الجدول الاحتمالي التالي:

x	-1	0	1	2	3
f(x)	0.125	0.500	0.200	0.050	0.125

(أ) أوجد $E(X)$ و $Var(X)$.

(ب) إذا كانت $Y = 2X + 1$ فأوجد $E(Y)$ و $Var(Y)$.

(جـ) صف نوعية العلاقة بين $E(X)$ و $E(Y)$ وكذلك بين $Var(X)$ و $Var(Y)$.

٣- إذا كانت $f(x)$ معطاة بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{6 - |7 - x|}{36} \quad , \quad x = 2, 3, \ldots, 12$$

فأوجد متوسط وتباين المتغير العشوائي X ؟

٤- (أ)   إذا كانت $f(x)$ معرفة كالتالي :

$$f(x) = \frac{1}{n} \quad , \quad x = 1, 2, ..., n$$

فأوجد $E(X)$ و $Var(X)$.

(ب)   إذا كان X يأخذ القيم $0, 1, 2, ..., n$ بتكرارات متناسبة إلى معاملات ذي الحدين، أي $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$

فوضح أن $E(X) = \frac{n}{2}$ ، وكذلك $Var(X) = \frac{n}{4}$

٥- أثبت صحة الخاصية التالية :

$$E(X) + E(Y) E(X + Y)$$

إذا كان للمتغير العشوائي X دالة كثافة:

$$f(x) = \frac{1}{4} \quad , \quad x = 1, 2, 3, 4$$

وللمتغير العشوائي Y دالة كثافة

$$f(y) = \binom{3}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{3-y} \quad , \quad y = 0, 1, 2, 3$$

٦- احسب القيمة المتوقعة لكل من القوانين الاحتمالية التالية :

(أ) $$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}$$

(ب) $$f(x) = \begin{cases} 1 - |1 - x| \ , & 0 < x < 2 \\ 0 \ , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(جـ)
$$P(x) = \begin{cases} \binom{6}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{6-x} & , \ x = 1, 2, ..., 6 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(د)
$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{8}{x}\binom{6}{6-x}}{\binom{14}{6}} & , \ x = 0, 1, 2, ..., 6 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

٧- علم أن دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل X هي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\text{Log } 3)\ x} & , \ 1 < x < 3 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(أ) أوجد قيمة كل من $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^3)$.

(ب) استخدم الناتج في (أ) في إيجاد قيمة $E(X^3 + 2X^2 - 3X + 1)$.

٨- أثبت أنه إذا كان لدينا القانون الاحتمالي

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

فإن

$$E(X - \mu)^2 = \begin{cases} 0 & , \ n = 1, 3, 5, 7, ... \\ 1.3.5 ... (n\text{-}1)\ \sigma^n & , \ n = 2, 4, 6, 8, ... \end{cases}$$

٩- إذا كان ربح مقاول هو متغير عشوائي متصل وبدالة كثافة احتمالية

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{18} & , \; -1 < x < 5 \\ 0 & , \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فما الربح المتوقع للمقاول؟

١٠- أثبت أن $E(\alpha + \beta X)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \alpha^{n-j} \beta^j E(X^j)$

باستخدام مفكوك ذي الحدين $(\alpha + \beta X)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \alpha^{n-j} (\beta X)^j$

١١- إذا كان لدينا التوزيع التالي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 (1-x) & , \; 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد المتوسط والانحراف المعياري لذلك التوزيع.

١٢- إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلا له دالة كثافة احتمال معطاة :

$$f(x) = cx \quad , \quad 1 < x < 2$$

فأوجد مايلي :

(أ) قيمة c .

(ب) المتوسط.

(جـ) التباين والانحراف المعياري.

١٣- إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلاً بدالة كثافة احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2} & , 1 \le x \le 2 \\ \frac{3-x}{2} & , 2 \le x \le 3 \\ 0 & , \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X.

١٤- إذا كانت $f(x, y)$ معطاة بالصيغة التالية :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y & , 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد معامل الارتباط بين X و Y.

١٥- احسب القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X (إن وجدت) إذا كانت دالته الاحتمالية هي

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} \quad , \quad |x| > 1$$

١٦- إذا كان X_t متغيراً عشوائياً يمثل عدد المكالمات التليفونية في فترة زمنية طولها t وبدالة كتلة احتمال معطاة بالصيغة الرياضية

$$P(X_t = k) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & , k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & , \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X_t.

١٧- إذا كان Y متغيرًا عشوائيًا بدالة كثافة الاحتمال التالية

$$P(Y = k) = \frac{1}{k!} \int_0^\infty f(t)\, e^{-t}\, dt \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

حيث إن $f(t)$ دالة كثافة احتمال توزيع متصل، فأثبت أن $E(Y) = \mu$.

١٨- إذا كان X و Y و Z ثلاثة متغيرات عشوائية، وكانت a و b و c و d أعدادا ثابتة، فأثبت أن

(أ) $$Cov(a + bX\, ,\, c + dX) = bd\, Cov(X\, ,\, Y)$$

(ب) $$Cov(X + Y\, ,\, Z) = Cov(X\, ,\, Z) + Cov(Y\, ,\, Z)$$

١٩- إذا كان $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$ متتابعتين من المتغيرات، فأثبت أن

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ ,\ \sum_{i=1}^{m} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} Cov\,(x_i\, ,\, y_i)$$

٢٠- إذا كان $x_1, \ldots, x_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع بمتوسط μ وتباين، فأثبت أن

(أ) $$E\,\overline{X} = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \mu$$

(ب) $$Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

(جـ) $$E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right) = (n - 1)\,\sigma^2$$

٢١- برهن أنه لأي متغير عشوائي غيرسالب X وبدالة توزيع F(x) يكون

$$E(X^n) = \int_0^{\infty} n\, x^{n-1}\, (1 - F(x))\, dx$$

٢٢- سحبت عينة حجمها ثلاث لمبات (مصابيح) عشوائيًا من صندوق يحتـوي على 16 لمبة (مصباحًا) نعلم مسبقا أن من بينها أربع لمبات (مصابيح) غير صالحة. أوجد القيمة المتوقعة لعدد اللمبات غير الصالحة في العلبة.

٢٣- إذا كانت دالة الكثافة لمتغير احتمالي X هي

$$f(x) = a + bx^2 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

وكانت القيمة المتوقعة للمتغير هي

$$E(X) = \frac{3}{5}$$

فأوجد قيمتي الثابتين a, b.

٢٤- إذا كان X متغيرًا عشوائيًا بدالة كثافة احتمالية

$$f(x) = 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

فأوجد مايلي :

(أ) $E(X^n)$

(ب) المتوسط والتباين للمتغير X.

٢٥- إذا كان للمتغيرين X ، Y الدالة المشتركة التالية:

$$f(x\,,\,y) = a\,y\,(x - y)\,e^{-(x+y)}$$

فأوجد مايلي :

(أ) قيمة الثابت a .

(ب) Cov (X , Y).

٢٦- أوجد قيمة الثابت a ، والقيمة المتوقعة والتباين عندما تأخذ دالة الكثافـة الاحتمالية إحدى الصيغ التالية :

(أ) $f(x) = a\,x\,e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad x \ge 0$

(ب) $f(x) = a\left(1 - x^2\right) \quad , \quad -1 \le x \le 1$

(جـ) $f(x) = a\,x^{-2} \quad , \quad x \ge 5$

(د) $f(x) = \dfrac{1}{5 - a} \quad , \quad 2 < x < 5$

٢٧- يربح مستثمر في الأسهم في نهاية الأسبوع ضعف استثماراته باحتمال p، ويخسر كل استثماراته باحتمال $1-p$. عندما يتبين له من المعلومات السابقة أن احتمال ربحه أكثر من خسارته؛ أي أن $p > \frac{1}{2}$ فإنه يستخدم أسلوب كيلي (Kelly) وذلك بأن يستثمر بالجزء $(2p - 1)$ من ثروته. أوجد القيمة المتوقعة لثروته بعد n أسبوع إذا كان قد بدأ بثروة مقدارها x ريال مستخدمًا أسلوب كيلي.

الفصل الخامس

العزوم والدوال المولدة للعزوم

● العزوم ● العلاقة بين العزوم حول الوسط الحسابي والعزوم حول الصفر ● مقياس الالتواء والتفرطح باستخدام العزوم ● الدوال المولدة للعزوم ●خواص الدوال المولدة للعزوم ● الدالة المولدة للتراكمات (الدالة التراكمية) ● العلاقة بين التراكمات والعزوم ● الدالة المميزة والمنوال للمتغيرات العشوائية المنفصلة ● الدالة المولدة للاحتمال ● تمارين

١ , ٥ العزوم

تستخدم العزوم (moments) عادة لقياس التشتت (dispersion)، والالتواء (skewness)، والتفرطح (kurtosis) وفي وصف شكل كثير من التوزيعات أو الدوال الاحتمالية. وتدخل العزوم كذلك في كثير من التطبيقات ذات العلاقة بالتوقع الرياضي، كما يمكن أن تُعدَّ العزوم من تطبيقات التوقع الرياضي وذلك لكونها تعرف بدلالة التوقع الرياضي. ويمكن القول بأن العزوم تحمل الكثير من خصائص التوزيعات الاحتمالية.

تعريف ١ , ١ , ٥ (العزم حول الصفر أو نقطة الأصل)

العزم ذو الرتبة r حول نقطة الأصل (أو الصفر)، ويرمز له بالرمز μ'_r ،

ويعرف على أنه القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X^r ؛ أي أن

(أ) في حالة المتغير العشوائي المنفصل:

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_x x^r f(x) \quad , \; r = 0, 1, 2, \ldots$$

(ب) وفي حالة المتغير العشوائي المتصل:

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx \quad , \; r = 0, 1, 2, \ldots$$

ملاحظة ١ , ١ , ٥

عندما يكون $r = 0$ فإن $X^r = X^0 = 1$ وعندها يمكن كتابة:

$$\mu'_0 = E(X^0) = E(1) = 1$$

وعندما يكون $r = 1$ فإن $X^1 = X$ ويمكننا كتابة:

$$\mu'_1 = E(X^1) = E(X) = \mu$$

أي أن μ'_1 هو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X أو متوسط (أو مركز) التوزيع X، الذي يرمز له بالرمز μ.

تعريف ٢ , ١ , ٥ (العزم حول الوسط الحسابي)

يعرّف العزم من الرتبة r حول الوسط الحسابي μ، ويرمز له بالرمز μ_r، على أنه القيمة المتوقعة للمتغير $(X - \mu)$؛ أي أن:

(أ) في حالة المتغير العشوائي المنفصل:

$$\mu_r = E\left[(X - \mu)^r\right] = \sum_x (x - \mu)^r f(x) \quad , \; r = 0, 1, 2, \ldots$$

(ب) وفي حالة المتغير العشوائي المتصل:

$$\mu_r = E\left[(X - \mu)^r\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x)\, dx \quad , \; r = 0, 1, 2, \ldots$$

ملاحظة ٢ , ١ , ٥

نلاحظ من تعريف الوسط الحسابي μ - في بعض الأحيان - أن μ قد لاتكون موجودة. أما إذا كانت μ موجودة فإن:

$$\mu_{r=0} = \mu_0 = E\left[(X-\mu)^0\right] = E(1) = 1 \ , \qquad r = 0$$

$$\mu_{r=1} = \mu_1 = E\left[(X-\mu)^1\right] = E(X-\mu) = E(X) - E(\mu) = \mu - \mu = 0,$$

$$\mu_{r=2} = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2.$$

أي أن العزم الثاني حول الوسط μ_2 هو التباين، ويمكن كتابة μ_2 كذلك بدلالة العزم حول الصفر كما يلي:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= E\left[(X-\mu_1')^2\right] = E\left(X^2 - 2\mu_1' X + \mu_1'^2\right) \\ &= E(X^2) - 2\mu_1' E(X) + \mu_1'^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu_1' + \mu_1'^2 \\ &= E(X^2) - \mu_1'^2 \end{aligned}$$

وقد وجدنا هذه العلاقة في الفصل الرابع عند حساب التباين عند معرفة الوسيط والقيمة المتوقعة لمربع المتغير العشوائي.

٢ , ٥ العلاقة بين العزوم حول الوسط الحسابي والعزوم حول الصفر

من السهل التوصل إلى علاقة رياضية تربط بين العزوم حول الوسط الحسابي والعزوم حول نقطة الأصل (الصفر) وذلك باتباع مايلي:

نفرض أن لدينا متغيرًا عشوائيًا منفصلا، ومن تعريف العزم حول الوسط الحسابي نحصل على

$$\mu_r = \sum (x - \mu'_1)^r f(x)$$

باستخدام مفكوك ذي الحدين يمكن كتابة $(X - \mu'_1)^r$ كما يلي:

$$(X - \mu'_1)^r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu'^j_1 X^{r-j}$$

ويمكن كتابة μ_r كالتالي:

$$\mu_r = \sum \left[\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu'^j_1 X^{r-j} \right] f(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu'^j_1 \left[\sum X^{r-j} f(x) \right]$$

وحيث إن $\sum X^{r-j} f(x) = \mu'_{r-j}$ ، فإنه يمكن كتابة μ_r على الصورة التالية:

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu'_1 \ \mu'_{r-j}$$

من العلاقة الرياضية السابقة وبوضع $r = 1, 2, 3, 4$ نحصل على مايلي:

$$\mu_1 = \mu'_1 - \mu'_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2 + 2\mu_1 \ (\mu'_1)^3$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2(\mu'_1)^2 - 3(\mu'_1)^4$$

ملاحظـــة ١ , ٢ , ٥

يمكن استخدام العزوم الأربعة الأولى والمعرفة سابقا$(\mu_4 , \mu_3 , \mu_2 , \mu_1)$ في تعريف بعض المقاييس المختلفة، ومن هذه المقاييس: الوسط الحسابي، والتباين، والالتـواء،

والتفرطح. كما يمكن الحصول على هذه العزوم الأربعة مباشرة بدلالة العلاقة التالية

$$\mu_r = E(X - \mu'_1)^r$$

وذلك بالتعويض عن r بالقيم 1, 2, 3, 4.

٣,٥ مقياس الالتواء والتفرطح باستخدام العزوم

١,٣,٥ قياس الالتواء

نتعرض، عند دراسة أول مقررات الإحصاء، عادة لتوزيعات البيانات الإحصائية وأشكالها، ونعرف من أشكال التوزيعات الإحصائية توزيعات متماثلة، وتوزيعات غير متماثلة، ومن أمثلة التوزيعات غير المتماثلة التوزيعات الملتوية (skewed distributions)، ونعرف كذلك كيفية حساب الالتواء وتحديد اتجاهه وذلك باستخدام مقياس «بيرسون» للالتواء المشتق من العلاقة التجريبية للمتوسطات الثلاثة: الوسط، الوسيط، والمنوال. نريد في هذا البند، توظيف العزوم كمقياس للالتواء. وبذلك يمكننا التعرف على مقدار واتجاه الالتواء للبيانات الإحصائية باستخدام العزم الثالث حول الوسط الحسابي لهذه البيانات.

تعريف ١,٣,٥ (مقياس الالتواء)

مقياس الالتواء هو النسبة بين العزم الثالث حول الوسط الحسابي ومكعب الانحراف المعياري، ويرمز له بالرمز α_3؛ أي أن:

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{العزم الثالث حول الوسط الحسابي}}{\text{مكعب الانحراف المعياري}}$$

$$\frac{\mu_3}{(\sqrt{S^2})^3} = \frac{\mu_3}{(S^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{S^3} = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_2}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}}$$

يمكن من العلاقة الرياضية السابقة معرفة مقدار الالتواء واتجاهه؛ أي معرفة فيما إذا كان الالتواء موجبا أو سالبا. من الواضح أن اتجاه الالتواء يعتمد على إشارة العزم الثالث حول الوسط الحسابي؛ فإذا كانت إشارة μ_3 موجبة، كان الالتواء موجبا، وإذا كانت سالبة كان الالتواء كذلك. بعبارة أخرى، إذا كان $\mu_3 = 0$ فإن التوزيع يكون توزيعا طبيعيا، وإذا كان $\mu_3 > 0$ فإن التوزيع يكون ملتويا التواء موجبا (نحو اليمين)، وإذا كان $\mu_3 < 0$ فإن التوزيع يكون ملتويا التواء سالبا (نحو اليسار).

٢,٣,٥ معامل التفرطح

من دراستنا السابقة عرفنا التفرطح (kurtosis) على أنه درجة علو القمة للتوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي المتماثل. فإذا كانت قمة المنحنى عالية نسبيًا، عندها يسمى التوزيع مدببًا (leptokurtic)، وإذا كان المنحنى متفرطحا من أعلى، عندها يسمى التوزيع متوسط التفرطح (platykurtic). يسمى المنحنى الطبيعي عادة معتدل التفرطح (mesokurtic) ويمكن أخذه كمقياس للمقارنة للحكم على درجة تفرطح التوزيع.

لمعرفة درجة تفرطح التوزيع سوف نعرّف مقياسا أو معاملا لقياس ذلك.

تعريف ٢,٣,٥ (مقياس التفرطح)

معامل التفرطح هو النسبة بين العزم الرابع حول الوسط الحسابي ومربع التباين، ويرمز له بالرمز α_4؛ أي أن

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{\text{العزم الرابع حول الوسط الحسابي}}{\text{مربع التباين}} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

تكون قيمة مقياس التفرطح في التوزيع الطبيعي مساوية 3 ؛ أي أن $\alpha_4 = 3$. ومن ذلك نلاحظ أنه إذا كان معامل التفرطح أكبر من 3 يكون المنحنى مدبب التفرطح، وإذا كان معامل التفرطح أصغر من 3 يكون المنحنى متوسط التفرطح.

مـثـال ١ ,٣ ,٥

إذا كانت العزوم الأربعة الأولى لتوزيع حول الوسط الحسابي هـي عـلـى التوالـي $\mu_1 = 11, \mu_2 = 21.6, \mu_3 = 37.38, \mu_4 = 934.62$، فأوجد معاملـي الالتواء والتفرطح لهذا التوزيع.

الحـل:

من التعريف ١ ,٣ ,٥ نحصل على

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{s^3} = \frac{37.38}{(\sqrt{21.6}\,)^3} = \frac{37.38}{100.388} = 0.372$$

ويتضح منه أن التوزيع قليل الالتواء.

من تعريف مقياس التفرطح نجد أن:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{s^4} = \frac{934.62}{(21.6)^2} = 2.00$$

ويتضح من ذلك أن التوزيع متوسط التفرطح وذلك لأن $3 > 2 = \alpha_4$.

مـثـال ٢ ,٣ ,٥

إذا كان العزم الثاني حول الوسط الحسابي لتوزيعين هو 9, 16 بينما العزم الرابع حول الوسط الحسابي لهمـا 230, 780 على التوالي، فحدد فيما إذا كان التوزيعان:

(أ) مدّببي التفرطح. (ب) معتدلي التفرطح. (جـ)متوسطي التفرطح.

الحـل:

من تعريف معامل التفرطح نحصل على

$$\alpha_4 = \frac{230}{9^2} = 2.8$$

ومنه يتضح أن التوزيع الأول متوسط التفرطح.
وبالمثل نجد في التوزيع الثاني أن

$$\alpha_4 = \frac{780}{(16)^2} = \frac{780}{256} = 3.04$$

ومن ذلك يتضح أن التوزيع معتدل التفرطح.

مثال ٣ , ٣ , ٥

إذا كان العزم الرابع للتوزيع المتماثل هو 243، فما قيمة الانحراف المعياري التي تجعل التوزيع معتدلا؟

الحل:

كما هو معروف في التوزيع الطبيعي المتماثل، فإن قيمة معامل التفرطح هي 3؛ أي أن $\alpha_4 = 3$.

بذلك يكون $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{s^4} = 3$، وحيث إن $\mu_4 = 243$ فإن $\frac{243}{s^4} = 3$، ومنه ينتج أن $S = 3$.

٤ , ٥ الدوال المولدة للعزوم

تعريف ١ , ٤ , ٥ (الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي منفصل)

الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي المنفصل X حول الصفر، يرمز لها بالرمز M(t)، هي القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي e^{tX}، حيث t متغير حقيقي؛ أي أن

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x} e^{tX} f(x)$$

ملاحظة ١ , ٤ , ٥

قد يتعذر أحيانا وجود الدالة المولدة للعزوم؛ أي أن M(t) قد تكون غير

موجودة، وبذلك نقول إن الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ للمتغير العشوائي X موجودة إذا كان يوجد عدد ثابت موجب وليكن b بحيث إن الدالة $M(t)$ منتهية لكل $|t| < b$.

تعريف ٢ , ٤ , ٥ (الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي متصل)

الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي المتصل X حول الصفر التي يرمز لها بالرمز $M(t)$ هي القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي e^{tX} ؛ أي أن:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)\, dx$$

نحاول فيما يلي مناقشة التعريفين السابقين اللذين ينصان على أن $E\left(e^{tX}\right)$ هي دالة مولدة لعزوم المتغير العشوائي X:

من مفكوك لورانس للدالة الأسية e^{tX} نحصل على

$$e^{tX} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{t^r x^r}{r!} + \dots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(t\,x)^r}{r!}$$

في حالة أن X متغير عشوائي منفصل نجد أن

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x} e^{tX} f(x)$$

$$= \sum_{x} \left[1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \dots\right] f(x)$$

$$= \sum_{x} f(x) + \sum_{x} x\, f(x) + \frac{t^2}{2!} \sum_{x} x^2 f(x) + \dots$$

$$= 1 + t\,\mu_1' + \frac{t^2}{2!}\,\mu_2' + \dots + \frac{t^r}{r!}\,\mu_r' + \dots$$

إذن
$$M(t) = E(e^{tX}) = \mu'_0 + t\,\mu'_1 + \frac{t^2}{2!}\,\mu'_2 + \frac{t^r}{r!}\,\mu'_r + \ldots$$

حيث إن

$$\mu'_0 = \sum_x x^0 f(x) = 1$$

$$\mu'_1 = \sum_x x^1 f(x)$$

$$\mu'_2 = \sum_x x^2 f(x)$$

$$\mu'_r = \sum_x x^r f(x)$$

من ذلك يمكننا ملاحظة أن العزم الأول حول الصفر μ'_1 هو معامل $\frac{t}{1!}$ في الدالة المولدة للعزوم M(t)، وأن العزم الثاني حول الصفر μ'_2 هو معامل $\frac{t^2}{2!}$ من الدالة المولدة للعزوم M(t)، وأن العزم الثالث حول الصفر μ'_3 هو معامل $\frac{t^3}{3!}$ في الدالة M(t) وهكذا، والعزم الرائي حول الصفر μ'_r هو معامل $\frac{t^r}{r!}$ في الدالة M(t).

وبالمثل في حالة أن X متغير عشوائي متصل يمكن كتابة M(t) كما يلي:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \ldots\right\} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + t\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx + \frac{t^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx + \ldots$$

ومنه ينتج أن:

$$M(t) = E(e^{tX}) = 1 + t\mu_1' + \frac{t^2}{2!}\mu_2' + \dots$$

حيث إن

$$\mu_0' = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\mu_1' = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx$$

$$\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\,f(x)\,dx$$

نظرية ١ , ٤ , ٥

إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X حول الصفر ـ M(t) ـ موجودة فإن لكل عدد صحيح موجب r نحصل على:

$$\left.\frac{d^r M(t)}{dt^r}\right]_{t=0} = M^r\,(t=0) = \mu_r'$$

تنص النظرية على أنه بتفاضل الدالة المولدة للعزوم M(t) مرة واحدة، ومن ثم وضع $t = 0$ يمكن الحصول على العزم الأول حول الصفر μ_1'، وبتفاضل الدالة M(t) مرة ثانية ووضع $t = 0$ نحصل على العزم الثاني حول الصفر μ_2'، وهكذا لإيجاد بقية العزوم حيث إنه بتفاضل الدالة M(t) عدد r من المرات ووضع $t = 0$ نحصل على العزم الرائي حول الصفر. يمكن ملاحظة استخدام هذه النظرية في حالة المتغير العشوائي المنفصل والمتصل على حد سواء.

البرهـان

حيث إن $M^r(t)$ أو $\frac{d^r M(t)}{dt^r}$ هي المشتقة الرائية للدالة $M(t)$ بالنسبة إلى t.

فمن تعريف الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ نحصل على:

$$M(t) = E(e^{tX}) = 1 + t\,\mu_1' + \frac{t^2}{2!}\,\mu_2' + \ldots$$

إذن

$$M^{(1)}(t) = \mu_1' + \frac{2t}{2!}\,\mu_2' + \ldots$$

بوضع $t = 0$ نجد أن $M^{(1)}(t = 0) = \mu_1'$.

وبالمثل يمكن الحصول على المشتقة الثانية كما يلي:

$$M^{(1)}(t) = \mu_2' + \frac{2t}{2!}\,\mu_3' + \ldots$$

وبوضع $t = 0$ نجد أن $M^{(2)}(t = 0) = \mu_2'$.

وهكذا قد نستمر في اشتقاق الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ ووضع $t = 0$ يتضح أن:

$$M^{(r)}(t = 0) = \mu_r' \quad , \quad r = 1, 2, \ldots$$

٥ , ٥ خواص الدوال المولدة للعزوم

نورد في هذا البند عشر خواص للدالة المولدة للعزوم بالإضافة إلى بعـض الأمثلة لتبسيط فهمها وتيسير استخدامها.

الخاصية (١) بوضع $t = 0$ في الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ نجد أن قيمة الدالة $M(t)$ تساوي الواحد الصحيح؛ أي أن $M(0) = M(t = 0) = 1$.

الخاصية (٢) بتفاضل أو اشتقاق الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ بالنسبة إلى t عدد r من

المرات، وبالتعويض بعد ذلك عن $t = 0$ نحصل على مايسمى بالعزم الرائي حول الصفر μ'_r أي أن:

$$\left.\frac{d^r M(t)}{dt^r}\right]_{t=0} = M^r (t=0) = \mu'_r = E(X^r)$$

الخاصية (٣) من تعريف الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ يمكن كتابة مايلي:

$$M_a(t) = E\left[e^{t(X-a)}\right] = e^{-at} E(e^{tX})$$

$$= e^{-at} M(t)$$

حيث $M_a(t)$ هي الدالة المولدة للعزوم حول القيمـة a، ونلاحظ أنه يمكن كتابة الدالة المولدة للعزوم حـول a، $M_a(t)$، كحاصل ضـرب e^{-at} في الدالة المولدة للعزوم حول الصفر $M(t)$.

الخاصية (٤) من تعريف الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ يمكن كتابة مايلي:

$$M_{aX+b}(t) = E\left[e^{t(aX+b)}\right] = E\left[e^{taX} \cdot e^{tb}\right]$$

$$= E(e^{taX}) \cdot e^{tb}$$

$$= e^{tb} M(at)$$

إذن

$$M_{aX+b}(t) = e^{tb} M(at)$$

حيث إن a, b ثابتان، يمكن ملاحظـة أن $M_X(t)$ ترمز للدالة المولدة للـعـزوم للمتغير العشوائـي X حول الصفر. للاختصار سوف نستخـدم $M(t)$ بدلا من $M_X(t)$.

الخاصية (٥) كحالة خاصة من الخاصية (٤)، إذا كانت $a = 1$, $b = -\mu'_1$ فإننا

نحصل على

$$M_{X-\mu_1'}(t) = e^{-\mu_1' t} M(t)$$

الخاصية (٦) (الدالة المولدة للعزوم لمجموع متغيرين عشوائيين مستقلين) إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين، وكانت الدوال المولدة للعزوم حول الصفر لهما هما $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t)$ على التوالي، فإن:

$$M_{X_1+X_2}(t) = E\left[e^{t(X_1+X_2)}\right] = E\left[e^{tX_1} e^{tX_2}\right]$$

ولأن المتغيرين مستقلان فإن:

$$M_{X_1+X_2}(t) = E\left[e^{t(X_1+X_2)}\right] = E\left(e^{tX_1}\right) E\left(e^{tX_2}\right)$$

إذن

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) \,.\, M_{X_2}(t)$$

وهذا يعني أن الدالة المولدة للعزوم لمجموع متغيرين عشوائيين مستقلين يساوي حاصل ضرب الدالة المولدة للعزوم لكل منهما.

يمكن تعميم هذه الخاصية لأي عدد n من المتغيرات العشوائية المستقلة كالتالي:

$$M_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = M_{\sum_t X_t}(t) = E\left[e^{t\sum_t X_t}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

وهذا يعني أن الدالة المولدة للعزوم لمجموع أي عدد n من المتغيرات العشوائية المستقلة تساوي حاصل ضرب ا لدوال المولدة للعزوم لكل منهما.

الخاصية (٧) كحالة خاصة من الخاصية (٦)، إذا كانت المتغيرات العشوائية المستقلة لها نفس الدالة المولدة للعزوم، فإن الدالة المولدة للعزوم لمجموع هذه المتغيرات العشوائية المستقلة هي:

$$M_{\sum x}(t) = E\left[e^{t\sum x}\right] = [M(t)]^n$$

أي أنه للدالة المولدة للعزوم حول الصفر لمجموع متغيرات مستقلة نفس

الدالة المولدة للعزوم، وهي الدالة المولدة للعزوم لأي منها مرفوع للقـوة n، أو بعبارة أخرى هي الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ مضروبة في نفسها n مرة.

الخاصية (٨) يمكننا من الخاصية السابقة (٧)، إيجاد الدالة المولدة للعزوم حـول الوسط الحسابي كما يلي:

$$M_{\frac{1}{n}\sum X_i}(t) = E\left(e^{\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\frac{t}{n} X_i}\right)$$

إذن
$$M_{\overline{X}}(t) = \left[M_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

أو
$$M_{\overline{X}}(t) = \left[M\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

الخاصية (٩) إذا كان a, b عددين ثابتين، فإن العلاقات التالية صحيحة:

(أ) $$M_{X+a}(t) = E\left(e^{t(X+a)}\right) = e^{at} M(t)$$

(ب) $$M_{bX}(t) = E\left(e^{t(bX)}\right) = E\left(e^{tbX}\right) = M(bt)$$

(جـ) $$M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E\left(e^{t\left(\frac{X+a}{b}\right)}\right) = e^{\frac{at}{b}} M\left(\frac{t}{b}\right)$$

الخاصية (١٠) حالة خاصة من الخاصية (٩) الفقرة(جـ)، إذا كانت $a = -\mu$, $b = \sigma$

فإن :
$$M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{\mu}{\sigma}} M\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

وهي الدالة المولدة للعزوم للمتغير المعياري Z حيث أن $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

مثـال ١ , ٥ , ٥

إذا كانت دالة الكثافة للمتغير العشوائي المتصل X هي

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} , & x > 0 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد الدالة المولدة للعزوم، ثم استخدم هذه الدالة لإيجاد μ'_r وكذلك أوجد σ.

الحـل:

من تعريف الدالة المولدة للعزوم حول الصفر نحصل على

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tX} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{tX} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{x(t-1)}\,dx$$

$$= \lim_{s \to \infty} \left. \frac{e^{x(t-1)}}{t-1} \right]_0^s = \lim_{s \to \infty} \frac{e^{s(t-1)}}{t-1} - \frac{1}{t-1} = \frac{1}{1-t} , |t| < 1$$

وحيث إن

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^r + \ldots$$

$$= 1 + 1!\frac{t}{1!} + 2!\frac{t^2}{2!} + \ldots + r!\frac{t^r}{r!} + \ldots$$

ويكون $M(t) = \frac{1}{1-t}$، ومن ذلك ينتج أن $\mu'_r = r!$.

وحيث إن $\sigma^2 = \mu_2' - \left(\mu_1'\right)^2$ فإنه يكـون $\sigma^2 = 2 - 1 = 1$؛ أي أن الانحـراف المعياري يساوي 1.

مـثـال ٢ , ٥ , ٥

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا يمثل عدد مرات ظهور الصـورة عند رمي قطعـة معدنية متزنة n مرة، فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X تعطى كما يلي:

$$f(x) = \binom{n}{x} \frac{1}{2^n} \quad , \quad x = 0, 1, 2, ..., n$$

والدالة المولدة للعزوم $M(t)$ هي

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_x e^{tX} f(x) = \left[\sum_{x=0}^{n} e^{tX} \binom{n}{x}\right] \frac{1}{2^n}$$

من نظرية ذات الحدين نحصل على

$$M(t) = \frac{\left(1 + e^t\right)^n}{2^n}$$

ومن ذلك يمكن حساب المتوسط الحسابي والعزم الثاني للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$\mu_1 = M'(t=0) = \left.\frac{n\left(1 + e^t\right)^{n-1} e^t}{2^n}\right]_{t=0} = \frac{n\,(1+1)^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}$$

$$\mu_2 = M''(t=0) = \left.\frac{n(n-1)\left(1+e^t\right)^{n-2} \left(e^t\right)^2 + n\left(1 + e^t\right)^{n-1} e^t}{2^n}\right]_{t=0}$$

$$= \frac{\left[n(n-1)\left(1+1\right)^{n-2} + n(1+1)^{n-1}\right]}{2^n} = \frac{n(n-1) + 2n}{4} = \frac{n^2 + n}{4}$$

باستخدام العلاقة

$$\sigma^2 = \mu_2 - (\mu_1)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

نحصل على تباين المتغير العشوائي X

$$\sigma^2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = \frac{n^2 + n}{4} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n}{4}$$

يلاحظ أنه يمكن الحصول على هذه النتيجة باستخدام تعريف التوقع الرياضي والدالة

$$f(x) = \binom{n}{x} \frac{1}{2^n}$$

عندما $x = 0, 1, \ldots, n$.

في المثال التالي نوضح كيفية حساب القيمة المتوقعة لعدد متغير (غير ثابت) من المتغيرات العشوائية.

مثال ٣ ,٥ ,٥

نفرض أن عدد الزبائن المتسوقين من السوق المركزي للجمعية التعاونية بجامعة الملك سعود يوميًا هو متغير عشوائي بمتوسط 150 شخصًا. نفرض كذلك أن مايصرفه الزبائن على مشترياتهم عبارة عن عدد من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لها المتوسط المشترك 30 ريالا. كما نفرض أن مايصرفه أي زبون مستقل عن عدد الزبائن المتسوقين من السوق المركزي. أوجد القيمة المتوقعة لدخل السوق المركزي يوميًا بالريال.

الحل:

نفرض أن N متغير عشوائي يمثل عدد الأشخاص المتسوقين يوميًا.

نفرض أن الزبون i يصرف x_i ريال في السوق عند زيارته له.

يمكن التحقق من أن المقدار المتوقع لدخل السوق هو

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \mid N\right)\right]$$

ولكن

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \mid N=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mid N=n\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

وذلك لأن x_i مستقلة عن N.

$$= n\,E(X)$$

وذلك بفرض $E(x_i) = E(X)$ لقيم $i = 1, 2, ...$.

ومن ذلك نجد أن

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \mid N\right) = N\,E(X)$$

وبذلك يكون

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = E[N\,E(X)]$$

$$= E(N)\,.\,E(X)$$

$$= 150 \text{ x } 30 = 4{,}500$$

وبذلك نجد أن الدخل اليومي للجمعية التعاونية المتوقع هو 4,500 ريال.

نستخدم المثال التالي لحساب الدالة المولدة للعزوم لمجموع عشوائي لعدد من المتغيرات العشوائية.

مثال ٤,٥,٥

إذا كانت $X_1, ..., X_N$ متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة المتطابقة التوزيع، وكان N متغيراً عشوائيًا صحيح القيمة (integer) ومستقل عن x_i لجميع قيم i، فأوجد الدالة المولدة للعزوم لمجموع هذه المتغيرات.

الحل:

المطلوب هو إيجاد الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي $y = \sum_{i=1}^{N} x_i$

أي حساب:

$$M_y(t) = E\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\right]$$

ولإيجاد ذلك نحسب القيمة المتوقعة بشرط N=n أي أن:

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \mid N=n\right] &= E\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \mid N=n\right] \\ &= E\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} E\left[\exp(t\, x_i)\right] \\ &= \left[M_X(t)\right]^n \end{aligned}$$

حيث إن $\Phi_X(t)$ هي الدالة المولدة للعزوم لأي من المتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_N$، وبالتالي فإن:

$$E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \mid N\right] = \left[M_X(t)\right]^N$$

ومن ذلك نجد أن:

$$M_y(t) = E\left[\left[M_X(t)\right]^N\right]$$

يمكن استخدام المثال السابق لحساب الوسط الحسابي والتباين للمجموع العشوائي لمتغيرات عشوائية؛ أي حساب $\mu_{\sum_{i=1}^{N} x_i}$ و $Var\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$ على الترتيب.

لاحظ أن

$$\begin{aligned}
\mu_y &= E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \\
&= \frac{d}{dt} M_{\sum_{i=1}^{N} x_i}(t)\Big|_{t=0} \\
&= E\left[N\left(M_X(t)\right)^{N-1} M'_X(t)\right]_{t=0} \\
&= E\left[N\left(M_X(0)\right)^{N-1} M'_X(0)\right]_{t=0} \\
&= E\left[N \,.\, E(X)\right]
\end{aligned}$$

وذلك لأن $M'_X(0) = E(X)$ ، $\mu_y = E(N) \,.\, E(X)$

لاحظ أن $M_X(0) = 1$ لأي متغير عشوائي X.

لحساب تباين المجموع نحسب أولا $E(y^2)$ حيث إن

$$E(y^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_y(t)\Big|_{t=0}$$

$$= E\{N(N-1)[E(X)]^2 + N\,E(X^2)\}$$

$$= E(N).[EX^2 - (EX)^2] + (EX)^2\,(EN^2)$$

$$= (EN)\,Var(X) + (EX)^2\,(EN^2)$$

وباستخدام القيمة المتوقعة EY نحصل على

$$Var(y) = Ey^2 - (Ey)^2$$

$$= (EN)\,Var(X) + (EX)^2\,[(EN^2) - (EN)^2]$$

$$= (EN)\,Var(X) + (EX)^2\,Var(N)$$

٦ , ٥ الدالة المولدة للتراكمات (الدالة التراكمية)

التراكمات (cumulants) مجموعة من معلمات التوزيع الاحتمالي وتعـرف كالتالي :

$$e^{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{k_r t^r}{r!}} = \sum_{r=0}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!}$$

حيث إن k_r هو التراكم الرائي (r^{th} cumulant) .

بعبارة أخرى التراكمات معاملات في مفكوك، متسلسلة القوى الناتجة عن اللوغاريتم الطبيعي للدالة المولدة للعزوم حول الصفر لمتغير عشوائي، أي أن

$$K(t) = \log_e M(t) = k_1 t + k_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + k_r \frac{t^r}{r!} + \ldots$$

المعاملات ... $k_1, k_2, k_3, k_4,$ هي التراكم الأول والثاني والثالث والرابع . . . إلخ، وتسمى $K(t)$ الدالة المولدة للتراكمات(cumulant generating function) أو باختصار(cgf) أو الدالة التراكمية (cf). تحقق الدالة التراكمية الخاصية التي تقول إن «الدالة التراكمية لمجموع عدد من المتغيرات العشوائية المستقلة هو مجموع الدوال التراكمية لهذه المتغيرات».

بتفاضل الدالة التراكمية r مرة بالنسبة إلى t، والتعويض عن t بالقيمة صفر، فإننا نحصل على التراكم الرائي k_r، أي أن:

$$k_r = \left[\frac{d^r}{dt^r} \log_e M(t) \right]_{t=0}$$

٥,٧ العلاقة بين التراكمات والعزوم

من تعريف الدالة المولدة للتراكمات

$$K(t) = \log_e M(t) = \log_e \left(\sum_{r=0}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!} \right)$$

أو

$$k_1 t + k_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + k_r \frac{t^r}{r!} + \ldots = \log_e \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!} \right) = \log_e (1 + z)$$

حيث إن:

$$Z = \sum_{r=1}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!}$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!}\right] - \frac{1}{2}\left[\sum_{r=1}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!}\right]^2 + \frac{1}{3}\left[\sum_{r=1}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!}\right]^3 - \ldots$$

$$= \left[\mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots\right] - \frac{1}{2}\left[\mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots\right]^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left[\mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots\right]^3 - \frac{1}{4}\left[\mu'_1 t + \ldots\right]^4 + \ldots$$

$$= \mu'_1 t + \left(\mu'_2 - \mu'^2_1\right)\frac{t^2}{2!} + \left(\mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'^3_1\right)\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

بمقارنة مفكوك متسلسلة القوى:

$$\mu'_1 t + \left(\mu'_2 - \mu'^2_1\right)\frac{t^2}{2!} + \left(\mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'^3_1\right)\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

ومفكوك متسلسلة القوى في تعريف الدالة المولدة التراكمية

$$k_1 t + k_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + k_r \frac{t^r}{r!} + \ldots$$

نحصل على التراكمات الأربعة الأولى

$$k_1 = \mu'_1$$

$$k_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1 = \mu_2$$

$$k_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu'^3_1 = \mu_3$$

$$k_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 - 3\mu'^2_2 + 12\mu'_2\mu'^2_1 - 6\mu'^2_1 = \mu_4 - 3\mu^2_2$$

٨ , ٥ الدالة المميزة والمنـوال للمتغيرات العشوائية المنفصلة

قد يتعذر أحيـانًا وجود الدالة المولدة للـعـزوم $M(t)$ لكثير من التوزيعـات الاحتمالية. عندها يمكن الاستعاضة عن هذه الدالة بدالة أخرى تسمى الدالة المميزة (characteristic function) أو اختصارًا (c.f.). تتمتع الدالة المميزة بخواص مماثـلـة لخواص الدالة المولدة للعزوم.

ندرس كذلك في هذا البند تعريف المنـوال ونوضح كيفية تحديد المنـــوال بواسطة الدالة المولدة للعزوم.

تعريف ١ ,٨ ,٥

الدالة المميزة لمتغير عشوائي X، ويرمز لها بالرمز $\Phi(t)$، هي القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي e^{itX} ؛ أي أن

$$\Phi(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

في حالة المتغير العشوائي المنفصل، يمكن تعريف الدالة المميزة $\Phi(t)$ كمايلي:

$$\Phi(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum e^{itX}\ P(X = x)$$

أما في حالة المتغير العشوائي المتصل تعرف $\Phi(t)$ كما يلي:

$$\Phi(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX}\ f(x)\ dx$$

حيث إن t عدد حقيقي، و $i = \sqrt{-1}$ وحدة تخيلية.

إذا كانت قيم المتغير العشوائي محصورة في مجموعة الأعداد الصحيحة، فإنـنـا

نكتب أحياناً
$$\Phi_X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{itn}\, p_n$$

حيث إن $p_n = P(X = n)$.

تمتاز الدالة المميزة $\Phi(t)$ عن الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ بكونها دائما موجودة وذلك لأن $|e^{itX}| \le 1$ لكل الأعداد الحقيقيـة t، ويمكن تعريفها لكل تـوزيـع احتمالي. ويمكن كتابة الدالة المميزة $\Phi(t)$ في صورة متسلسلة كمايلي:

$$\Phi(t) = 1 + it\,\mu_1' + \frac{(it)^2}{2!}\mu_2' + \ldots + \frac{(it)^k}{k!}\mu_k' + \ldots$$

ويكون العزم K حول الصفر للمتغير العشوائي X هو معامل $\frac{(it)^k}{k!}$.

والآن ندرس المنـوال (mode) في التوزيعات الاحتمالية المتقطعة أو المنفصلة، وذلك لبساطة هذه التوزيعات، ولأن غالبية التوزيعات المنفصلة، كما سنلاحظ في الفصل السادس، معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة.

نقدم الآن تعريفًا للمنـوال وللتوزيعات المعرّفة على مجموعة الأعداد الصحيحة N.

تعريف ٢,٨,٥

نقول إن للتوزيع الاحتمالي $p_n = P(X = n)$ مـنوالا عند النقطة $X = m$ إذا كان $p_n < p_{n-1}$ لقيم $n \le m$ وكان $p_n > p_{n-1}$ لقيم $n \le m$ حيث $n, m \in N$.

قد يكون للتوزيع الاحتمالي منـوال ويسمى وحيد المنـوال (unimodal) أو قد يكون له منوالان فيسمى ثنائي المنـوال (bimodal)، وقد تتعدد منـاويله فيسمى متعدد المنـاويل (multimodal). سنقتصر في دراستنا الموجزة الحالية على التوزيعات وحيدة المنوال.

من التعريف السابق يمكن برهان النظرية التمييزية التالية:

نظرية ١, ٨, ٥

تكون دالة التوزيع الاحتمالية المنفصلة P_n وحيدة المنوال حول الصفر، إذا، وفقط إذا، كانت الدالتان

$$Q_n = P_n - np_n$$

$$R_n = P_{n-1} - np_{n-1} \qquad n \in N$$

تعبران عن توزيعين احتماليين منفصلين، حيث إن $P_n = \sum_{i=1}^{n} P(x=i)$.

البرهان

نفرض أن p_n دالة ثقل احتمالية منفصلة لقيم $n \in N$ وحيدة المنوال حول الصفر، أي أن $m = 0$، والمطلوب في هذه المرحلة إثبات أن Q_n و R_n دوال احتمالية منفصلة. نلاحظ من العلاقة الأولى في النظرية أن

$$Q_{n-1} = P_{n-1} - (n-1)p_{n-1}$$

وبالطرح من العلاقة السابقة نجد أن

$$Q_n - Q_{n-1} = (l_n - n)p_n + (n-1)p_n$$

لنفرض أن الطرف الأيسر لهذه العلاقة هو q_n أي أن $q_n = Q_n - Q_{n-1}$، بأخذ التجميع على طرفي العلاقة الأخيرة نلاحظ أن

$$\sum q_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(1-n)p_n + (n-1)p_n \right]$$

$$= 1$$

لأن p_n تحقق تعريف وحدوية المنوال السابق عندما تكون $m = 0$. كما نلاحظ أن $q_n \geq 0$ لجميع قيم $n \in N$ مما يثبت أن q_n دالة ثقل احتمالية، وبالتالي فإن Q_n دالة توزيع احتمالية.

بالطريقة نفسها يمكن إثبات أن R_n دالة توزيع احتمالية.

لبرهان الاتجاه الآخر للنظرية: لنفـرض أن P_n دالة توزيع احتمالية، وأن العلاقتين في النظرية محققتان. من ذلك نلاحظ أن

$$Q_n = P_n - np_n$$

هي دالة توزيعية لمتغير عشوائي منفصل، وهذا يؤدي إلى أن

$$q_n = (1-n)(p_n - p_{n-1})$$

ومن ذلك يكون

$$q_n \geq 0 \quad , \quad n \geq 0$$

وأن $p_n \geq p_{n-1}$ لجميع قيم $n \geq 0$ وأن $p_n \leq p_{n-1}$ لقيم $n > 0$، ونلاحظ أن هذه العلاقة لاتقارن بين p_0 و p_1 وبالتالي فإن مـنـوال التـوزيــع $P_n , n \in N$ يكــون عند $n = 0$ أو $n = 1$ ولكن العلاقة الثانية في النظرية تؤدي إلى نتيجة مماثلة مفادها أن يكون منـوال P_n، لقيم $n \in N$ عند $n = 0$ أو $n = -1$.

بالجمع بين الحالتين السابقتين، فإن منـوال التوزيع يكون عند نقطة الأصل؛ أي عند $n = 0$.

يمكن تعميم النظرية السابقة لأي منـوال $n = m$ التي قد لايكون فيها $m = 0$.

نظريــة ٢, ٨, ٥

تكون دالة التوزيع P_n و $n \in N$ وحيدة المنوال عند $n = m$ إذا كان، وكان فقط، كل من

$$Q_{n+m} = P_{n+m} - np_{n+m}$$

$$R_{n+m-1} = P_{n+m-1} - np_{\alpha+n-1} \quad , \quad n \in N$$

دالة توزيع لمتغير عشوائي متقطع .

نترك برهان هذه النظرية للطالب لأنها لاتختلف في خطوات برهانها عــن النظرية (١, ٨, ٥) السابقة.

والآن نعرض تعبيرا للدالة وحيدة المنـوال بدلالة الدالة المميزة لها.

نظريـة ٥,٨,٣

يكون التوزيع المتقطع P_n و $n \in N$ بالدالة المميزة $P(t)$ وحيد المنـوال عند الصفر إذا كان، وكان فقط، كل من الدالة:

$$Q(t) = P(t) + i(1 - e^{it})\, P^{\backslash}(t)$$

والدالة:

$$R(t) = e^{it}\, P(t) + i(1 - e^{it})\, P^{\backslash}(t)$$

دالة مميزة.

البرهـان

نفرض أن التوزيع المتقطع P_n و $n \in N$ وحيد المنـوال. لاحظ أننا وجدنا في خطوات برهاننا للنظرية ٥,٨,١ أن:

$$q_n = (1\text{-}n)p_n + (n\text{-}1)p_{n\text{-}1}$$

دالة ثقل احتمالية عندما يكون التوزيع P_n و $n \in N$ وحيد المنـوال. بضرب طرفي المعادلة السابقة بالنواة (kernel) e^{itn} وأخذ التجميع على كل قيم n في مجموعة الأعداد الصحيحة نحصل على:

$$\sum_n e^{itn}\, q_n = \sum_n (1\text{-}n)p_n e^{itn} + \sum_n (n\text{-}1)p_{n\text{-}1} e^{itn}$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \sum e^{itn}\, p_n - \sum np_n e^{itn} + e^{it} \sum (n\text{-}1)p_{n\text{-}1} e^{it(n\text{-}1)} \\ &= P(t) - (-i)\frac{d}{dt}P(t) + e^{it}\,(-i)\frac{d}{dt}P(t) \\ &= P(t) + i(1 - e^{it})P^{\backslash}(t) \end{aligned}$$

دالة مميزة لتوزيع متقطع. وبالمثل نحصل على

$$R(t) = e^{it}\, P(t) + i(1 - e^{it})\, P^{\backslash}(t)$$

دالة مميزة لتوزيع متقطع.

نفرض الآن أن $P(t)$ دالة مميزة لتوزيع متقطع P_n و $n \in N$، وأن كلا من $Q(t)$ و$R(t)$ المعطاة في نص النظرية دالتان مميزتان لتوزيعين متقطعين، والمطلوب إثباته في هذه المرحلة هو أن P_n توزيع متقطع وحيد المنـوال عند الصفر.

بتطبيق نظرية المعكوس (inversion) للدوال المميزة أو بصورة أبسط بمساواة معاملات e^{itn} في المعادلتين لكل من $Q(t)$ و $R(t)$ نحصل على

$$q_n = (1-n)p_n + (n-1)p_{n-1}$$

و

$$r_{n-1} = (1-n)p_{n-1} + (n-1)p_{n-2}$$

من هاتين المعادلتين في برهان النظرية(١ ,٨ ,٥)، نجد أن التوزيع P_n و $n \in N$ لابد أن يكون وحيد المنـوال حول النقطـة $n = 0$. وبذلك نكون قد برهنا شقـي النظرية.

كما في النظريتين (١ ,٨ ,٥) و(٢ ,٨ ,٥) فإنه يمكن تعميم النظرية (٣ ,٨ ,٥) لأي منـوال لايساوي بالضرورة صفرا كما يلي، علما أن البرهان مماثل في خطواته لبرهان النظرية (٣ ,٨ ,٥) ولذلك نتركه ليكون بمثابة تمرين للقارىء.

نظرية ٤ ,٨ ,٥

يكون التوزيع المتقطع P_n و$n \in N$ بدالة مميزة $P(t)$ وحـيد المنـوال حـول $n = m$ إذا كان، وكان فقط، كل من المقدارين

$$Q(t) = \left[(1+m) - me^{it} \right] P(t) + i\left(1 - e^{it}\right)P'(t)$$

$$R(t) = \left[m - (m-1)e^{it} \right] P(t) + i\left(1 - e^{it}\right)P'(t)$$

دالة مميزة لتوزيع متقطع.

مثـال ١ ,٨ , ٥

أوجد الدالة المميزة للتوزيع الاحتمالي المعطى بالجدول التالي

x	0	1	2	3	4
p_x	1/8	1/8	1/2	1/8	1/8

الحـل:

من تعريف الدالة المميزة نجد أن:

$$\Phi(t) = \sum e^{itx} P(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{4} e^{itx} p_x$$

$$= e^{it(0)}\left(\frac{1}{8}\right) + e^{it(1)}\left(\frac{1}{8}\right) + e^{it(2)}\left(\frac{1}{2}\right) + e^{it(3)}\left(\frac{1}{8}\right) + e^{it(4)}\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + e^{it} + 4e^{2it} + e^{3it} + e^{4it}\right)$$

نلاحظ في التوزيع الاحتمالي أنه وحيد المنوال حول النقطة $n = 2$، كما أن دالة الثقل الاحتمالية متماثلة حول هذا المنـوال.

مثـال ٢ ,٨ , ٥

أوجد الدالة المميزة للتوزيع الاحتمالي المنفصل بدالة ثقل احتمالية

$$p_x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad , \quad x = 1, 2, \ldots$$

الحـل:

الدالة المميزة لهذا التوزيع الاحتمالي هي:

$$\Phi(t) = \sum e^{itx} p_x$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x e^{itx}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{it}\right)^x$$

$$= \frac{\frac{1}{2} e^{it}}{1 - \frac{1}{2} e^{it}}$$

$$= \frac{e^{it}}{2 - e^{it}}$$

والآن نورد المثال التالي لنوضح فيه كيفية حساب ذلك لدالة كثافة متغير عشوائي مستمر.

مـثـال ٣,٨,٥

إذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المعطاة بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \quad , \quad a \le x \le b$$

حيث إن a و b عددان ثابتان ومحدودان، فأوجد الدالة المميزة لهذه الدالة.

الحـل:

الدالة المميزة هي:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= E\left(e^{itx}\right)\\ &= \int e^{itx} f(x)\,dx\\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{itx}\,dx\\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left.\frac{e^{itx}}{it}\right|_a^b\\ &= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it\,(b-a)}\end{aligned}$$

نلاحظ أنه عند التعويض عـن $t = 0$ فإن $\Phi(0)$ لابد أن تساوي الوحدة، ولكننا سنحصل في العلاقة السابقة على قسمة مقدارين صفريين، وباستـخـدام علاقة لوبيتال (L'Hospitale) التي تنص على أنه إذا كانت $g(y) = 0\ ,\ h(y) = 0$ فإن

$$\lim_{x \to y} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to y} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

حيث إن $g'(x)$ و $h'(x)$ هي المشتقة الأولى للدالة $g(x)$ و $h(x)$ على الترتيب. ومن ذلك نجد أن

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \Phi(t) &= \lim_{t \to 0} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it\,(b-a)}\\ &= \lim_{t \to 0} \frac{ib\,e^{itb} - ia\,e^{ita}}{i\,(b-a)}\\ &= 1\end{aligned}$$

نلاحظ أن دالة الكثافة السابقة وحيدة المنـوال، وذلك لأنه توجد نقطة m بـحـيـث أن $a \le m \le b$ وأن $f(x) \le f(x+\varepsilon)$ لجـمـيـع قـيـم $x < m$، وأن $f(x) \ge f(x+\varepsilon)$ لجميع قيـم $x > m$. وفي الواقع يمكن القول بأن دالة الكثافـة الاحتمالية $f(x)$ وحيدة المنـوال حول أي نقطة في مجـال تعريفها لأنها تحقق تعريف وحدوية المنـوال للدوال المتصلة الذي سبق ذكره.

٩,٥ الدالة المولدة للاحتمال

يعدّ استخدام الدالة المولدة للاحتمال (probability generating function) ويشار إليها اختصارًا في كتب الاحتمال باللغة الإنجليزية (p.g.f.)، في التعبير عن التوزيعات المتقطعة أو المنفصلة أكثر شيوعا من استخدامها في التوزيعات المستمرة أو المتصلة، وذلك لتبسيط حساب قيمة الاحتمال عند قيم محددة للمتغير العشوائي.

تعريف ٥,٩,١

الدالة المولدة للاحتمال $\Psi(s)$ حيث إن $|s| < 1$ هي القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي s^X ؛ أي أن:

$$\Psi(s) = E(s^X)$$

في حالة المتغير العشوائي المنفصل يكون لدينا:

$$\Psi(s) = E(s^X) = \sum s^x \, P(X = x)$$

أما في حالة المتغير العشوائي المتصل فيكون:

$$\Psi(s) = E(s^X) = \int_{-\infty}^{\infty} s^x \, f(x) \, dx$$

حيث نفرض دائما أن $|s| < 1$ لتكون الدالة المولدة للاحتمال $\Psi(s)$ موجودة لكثير من المتغيرات العشوائية.

يمكن ملاحظة أنه لمتغير عشوائي متقطع صحيح وغير سالب يكون لدينا

$$\Psi(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \, P(X = x)$$

$$= P(X = 0) + s\,P(X = 1) + s^2\,P(X = 2) + \ldots$$

وبذلك نلاحظ أن الاحتمالات $P(X = x)$ هي معاملات s^X ولهذا يرجع كثير من الدارسين اسم الدالة المولدة للاحتمال.

بعض خواص الدالة المولدة للاحتمال

خاصية (١) أن $\Psi(1) = 1$ وذلك لأن

$$\Psi(1) = \sum (1)^x \, P(X = x)$$

$$= \sum p_x$$

$$= 1$$

أو في حالة المتغيرات المستمرة

$$\Psi(1) = \int (1)^x \, f(x)\, dx$$

$$= \int f(x)\, dx$$

$$= 1$$

خاصية (٢) أن $E(X) = \left.\frac{d}{ds}\Psi(s)\right|_{s=1}$ ، أي القيمة المتوقعة أو متوسط المتغير العشوائي؛ وذلك لأن

$$\frac{d}{ds}\Psi(s)\Big|_{s=1} = \left[\frac{d}{ds}E\left(s^{X}\right)\right]_{s=1}$$

$$= \left[\frac{d}{ds}\sum s^{x}\ P(X=x)\right]_{s=1}$$

$$= \left[\sum x\ s^{x-1}\ P(X=x)\right]_{s=1}$$

$$= \sum x\,P(X=x)$$

$$= E(X)$$

خاصية (٣) إذا كانت المشتقة رقم r للدالة المولدة للاحتمال موجودة، فإن

$$\frac{d^{r}}{ds^{r}}\ \Psi(s)\Big|_{s=1} = E\left[x(x-1)\ ...\ (x-r+1)\right]$$

أي يمكن إيجاد العزم المفكوكي (factorial moment) للمتغير العشوائي عن طريق اشتقاق الدالة المولدة للاحتمال.

يمكن الآن إيجاد العلاقة بين الدالة المولدة للعزم $M(t)$ والدالة المميزة $\Phi(t)$ والدالة المولدة للاحتمال $\Psi(s)$ كما يلي:

نظرية ١ , ٩ , ٥

إذا كانت لمتغير عشوائي X الدالة المولدة للعزم $M(t)$، والدالة المميزة $\Phi(t)$، والدالة المولدة للاحتمال $\Psi(s)$ فإن:

(أ) $M(\text{Log } s) = \Psi(s)$

(ب) $\Phi\left(\frac{1}{i}\text{ Log } s\right) = \Psi(s)$

(جـ) $M(it) = \Phi(t)$

البرهان

(أ) نعلم من تعريف الدالة المولدة للعزوم أن

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

ومن ذلك نجد أن

$$\begin{aligned} M(\text{Log } s) &= E\left(e^{X \text{ Log } s}\right) \\ &= E\left[\left(e^{\text{Log } s}\right)^X\right] \\ &= E\left(s^X\right) \\ &= \Psi(s) \end{aligned}$$

(ب) من تعريف الدالة المميزة

$$\Phi(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

ومن ذلك نجد أن

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{1}{i} \text{ Log } s\right) &= E\left(e^{iX\left(\frac{1}{i} \text{ Log } s\right)}\right) \\ &= E\left(e^{\text{Log } s}\right)^X \\ &= E\left(s^X\right) \\ &= \Psi(s) \end{aligned}$$

(جـ) وكذلك نلاحظ من تعريفي الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة مايلي:

$$\begin{aligned} M(it) &= E\left(e^{(it)X}\right) \\ &= E\left(e^{itX}\right) \\ &= \Phi(t) \end{aligned}$$

نلاحظ كذلك أنه يمكن الحصول على الدالة المولدة للعزوم من الدالة المميزة باستخدام العلاقة التالية:

$$\Phi\left(\frac{t}{i}\right) = M(t)$$

ويمكن الحصول عليها من الدالة المولدة للاحتمال باستخدام العلاقة التالية:

$$\Psi\left(e^{it}\right) = M(t)$$

والآن نقدم بعض الأمثلة لتوضيح كيفية حساب الدالة المولدة للاحتمال.

مثـال ١ , ٩ , ٥

احسب الدالة المولدة للاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنفصل، وبدالة ثـقـل احتمالية كما في الجدول التالي:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	1/8	1/8	1/2	1/8	1/8

الحـل:

من تعريف الدالة المولدة للاحتمال نكتب

$$\begin{aligned}
\Psi(s) &= E\left(s^{X}\right) \\
&= \sum_{x=0}^{4} s^{x}\, P(X = x) \\
&= \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right) s + \left(\frac{1}{2}\right) s^{2} + \left(\frac{1}{8}\right) s^{3} + \left(\frac{1}{8}\right) s^{4} \\
&= \left(\frac{1}{8}\right)\left(1 + s + 4s^{2} + s^{3} + s^{4}\right)
\end{aligned}$$

مثـال ٢, ٩, ٥

أوجد الدالة المولدة للاحتمال لمتغير عشوائي منفصل بدالة ثقل احتمالي

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad , \quad x = 1, 2, \ldots$$

ثم أوجد الوسط والتباين باستخدام الدالة المولدة للاحتمال.

الحـل:

$$\begin{aligned}
\Psi(s) &= \sum_x s^x f(x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} s^x \left(\frac{1}{2}\right)^x \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{s}{2}\right)^x \\
&= \frac{\frac{s}{2}}{1 - \frac{s}{2}} \\
&= \frac{s}{2 - s}
\end{aligned}$$

لإيجاد الوسط نكتب

$$\begin{aligned}
\mu &= E(X) \\
&= \left[\frac{d}{dx} \Psi(s)\right]_{s=1}
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{2-s}\right)\right]_{s=1}$$

$$= \left.\frac{(2-s)+s}{2-s}\right|_{s=1}$$

$$= 2$$

ولإيجاد التباين نستخدم العلاقة التالية

$$\mathrm{Var}(X) = E X^2 - (EX)^2$$

$$= E\left[X(X-1)\right] + EX - (EX)^2$$

$$= \left[\frac{d^2}{ds^2}\Psi(s)\right]_{s=1} + \mu - \mu^2$$

نحسب المقدار

$$E\left[X(X-1)\right] = \left[\frac{d^2}{ds^2}\Psi(s)\right]_{s=1}$$

$$= \left[\frac{d}{ds}\frac{2}{(2-s)^2}\right]_{s=1}$$

$$= \left[\frac{(2)(2)(2-s)}{(2-s)^4}\right]_{s=1}$$

$$= 4$$

ومن ذلك نجد أن

$$\mathrm{Var}(X) = 4 + 2 - 2^2$$

$$= 2$$

٥,١٠ تمـــاريـــن

١- احسب مقدار الالتواء واتجاهه في التوزيع المعطى بدالة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \begin{cases} k\,x^2\,(1-x)^3 \;, & 0 \le x \le 1 \\ 0 \;, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث k ثابت. يمكن أن نفترض أن

$$\int_0^1 x^m\,(1\text{-}x)^m\,dx = \frac{m!\;n!}{(m+n-1)!}$$

٢- دالة الاحتمال للتوزيع المستطيل أو المنتظم تعطى بالصيغة

$$f(x) = 1 \;,\; 0 \le x \le 1$$

أوجد العزوم الأربعة الأولى، ومن ثم أوجد الانحراف حول حول المتوسط للتوزيع السابق.

٣- أوجد العزوم الأربعة الأولى حول المتوسط للتوزيع التالي:

$$f(x) = x^2\,(6-x)^2$$

بين $x = 0$, $x = 6$، ومن ثم أوجد مقدار التفرطح للتوزيع المعطى.

٤- إذا كان X متغيرًا متصلاً بدالة الاحتمال التالية

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \;, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{2} \;, & 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{3-x}{2} \;, & 2 \le x \le 3 \\ 0 \;, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد معامل التفرطح للتوزيع المعطى.

٥- (أ) إذا كان المتغير العشوائي المتصل X للدالة المولدة للعزوم التالية:

$$M(t) = (1 - t)^2 \quad , \quad t < 1$$

فأوجد متوسط التوزيع المعطى وتباينه.

(ب) إذا كان للمتغير X الدالة المولدة للعزوم

$$M(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^t\right)^{\frac{1}{2}}$$

فأوجد $Var(X) , E(X)$.

(جـ) إذا كان للمتغير العشوائي X الدالة المولدة للعزوم المعطاة بالعلاقة

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(e^t + 1\right)^{10}$$

فبين نوع التوزيع للمتغير العشوائي X.

٦- إذا كان للمتغيرين العشوائيين المتصلين X , Y دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية:

$$f(x , y) = \begin{cases} e^{-y} \quad , \quad 0 < x < y < \infty \\ 0 \quad , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فأوجد مايلي

(أ) الدالة المولدة للعزوم للمتغيرين X , Y .

(ب) المتوسط والتباين لكل من المتغيرين X , Y .

٧- إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي

$$M(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^t\right)^5$$

فأوجد $P(X = 2$ أو $3)$.

٨- إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي

$$M(t) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{t}\right)^{q}$$

فوضح أن

$$P\left(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\right) = \sum_{x=1}^{5} \binom{q}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{q-x}$$

٩- (أ) إذا علمت أن الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي X هي

$$M(t) = e^{3t + 8t^2}$$

فأوجد دالة توليد العزوم للمتغير $Z = \frac{1}{4}(X - 3)$.

(ب) أوجد القانون الاحتمالي لمتغير عشوائي X إذا كانت دالته المولدة للعزوم هي

$$M(t) = 3(e^{t} - 1)$$

١٠- دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha - 1} e^{-\frac{x}{\beta}} , & x \geq 0 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(أ) أوجد الدالة المميزة المقابلة.

(ب) استخدم الدالة المميزة في الفقرة (أ) في إيجاد العزم الرائي للمتغير العشوائي X .

(جـ) اكتب دالة توليد العزوم مستخدما الدالة المميزة الناتجة في (أ).

(د) اكتب دالة توليد العزوم للمتغير العشوائي $Z = \frac{2X + 1}{3}$ وأوجد متوسط وتباين Z.

١١- برهن صحة العلاقة التالية لأي متغير عشوائـي X غير سالب

$$E(X^n) = \int_0^\infty n x^{n-1} [1 - F(x)] \, dx$$

١٢- إذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1, \ldots, X_n$ مستقلة ومتطابقة التوزيع بوسط μ وتباين σ^2 فأثبت مايلي:

(أ) $E(\overline{X}) = \mu$

حيث أن $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$.

(ب) $Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

(جـ) $E\left[\sum (X_i - \overline{X})^2\right] = (n-1)\,\sigma^2$

١٣- احسب القيمة المتوقعة EX إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الثقل الاحتمالية هي

(أ) $f(x) = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad x > 0$

(ب) $f(x) = \frac{5}{x^2} \quad , \quad x > 5$

(جـ) $f(x) = \frac{8}{5} \left(\frac{3}{8}\right)^x \quad , \quad x = 0, 1, \ldots$

١٤- أوجد الدالة المولدة للعزوم، والدالة المميزة، والدالة المولدة للاحتمال لدالتي الكثافة الاحتمالية ودالة الثقل الاحتمالية في التمرين (١٣) السابق.

١٥- يحتوي صندوق على خمس وحدات كهربية إحداها فاسدة والأربع الأخرى صالحة. إذا فحصنا هذه الوحدات واحدة تلو الأخرى فأوجد

(أ) توزيع المتغير العشوائي الناتج من ذلك.

(ب) الوسط والتباين لهذا التوزيع.

١٦- إذا كان X عدد الأوجه الناتجة من رمي ثلاث قطع نقدية n مرة، فأوجد مايلي:

(أ) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل.

(ب) متوسط التوزيع.

(جـ) تباين التوزيع.

(د) الدالة المولدة للاحتمال.

١٧- أوجد الدالة المولدة للعزوم، والدالة المميزة للمتغير العشوائي X بدالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{x^{n-1}}{\alpha^n} e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad , \quad x > 0 \, , \; \alpha > 0$$

١٨- ادرس ما إذا كان التوزيع المعطى في التمرين (١٧) وحيد المنوال أم لا.

١٩- أثبت أن دالة التوزيع المتقطعة P_n و $n \in N$ تكون وحيدة المنوال إذا كان، وكان فقط، كل من الدالتين

$$V(s) = P(s) + s\,(s-1)\,P'(s)$$

$$W(s) = s\,P(s) + s\,(s-1)\,P'(s)$$

دالتين مولدتين للاحتمال، حيث إن $P(s)$ هي الدالة المولدة للاحتمال لدالة التوزيع P_n و $n \in N$ و $P'(s)$ هي المشتقة الأولى للدالة $P(s)$.

٢٠- إذا فرضنا أن توزيع عدد الأطفال لنسبة عدد الأسر لعدد الأطفال في مجتمع ما كما يلي:

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0.05	0.20	0.10	0.50	0.10	0.05

فأوجد مايلي

(أ) متوسط عدد الأطفال لدى الأسرة.

(ب) تباين عدد الأطفال لدى الأسرة.

(جـ) تفرطح لهذا التوزيع.

٢١- برهن أن التوزيع في التمرين (٢٠) وحيد المنـوال، وأوجد الدالتين المميزتين Q(t) و R(t) المناظرتين لهذا التوزيع والمعطاة في النظرية (٣, ٨, ٥).

٢٢- أثبت أن التوزيع المنفصل بدالة ثقل احتمالية

$$f(x) = \binom{\eta}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, ..., n$$

وحيد المنوال وأوجد المنـوال، حيث إن $p + q = 1$. أوجد القيم الممكنة للمنـوال، وهل من الممكن أن يكون صفرًا؟

٢٣- أوجد الدالتين المميزتين Q(t) و R(t) للتوزيع المعطى في التمرين (٢٢) عندما يكون المنـوال وحيدًا (بفرض شروط ملائمة لذلك علـى n,P) و كما في النظرية (٤, ٨, ٥).

الفصل السادس

بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

● مقدمة ● توزيع ذي الحدين الاحتمالي ● التوزيع فوق الهندسي الاحتمالي ● توزيع بواسون ● توزيع ذي الحدين السالب ● التوزيع الهندسي ● التوزيع متعدد الحدود (كثير الحدود)

٦,١ مقدمـــــة

كما ذكرنا في الفصل الثالث، إن التوزيع الاحتمالي المنفصل هو احتمال لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي على حدة، أما في هذا البند فندرس بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، التي يكثر استخدامها عادة في دراسة المسائل الإحصائية وفي كثير من تطبيقات الاحتمال في العلوم الأخرى.

٦,٢ توزيع ذي الحدين الاحتمالي

توجد في الحياة العملية كثير من التجارب التي تحتوى على عدد من المحاولات المتكررة المستقلة، وكل محاولة من هذه المحاولات تتضمن فقط ظهور ناتجين؛ فعلى سبيل المثال، في محاولة رمي قطعة نقود معدنية، نحصل على ناتجين: إما صورة (head) أو كتابة (tail) وعند إجراء امتحان ما تكون النتيجة نجاحًا أو رسوبًا. وفي عملية الولادة قد يكون المولود ذكراً أو أنثى. إذا وقع حادث لشخص

ما، فيكون ذلك الشخص حيا أو ميتًا بسبب الحادث. في عملية فحص جهاز ما، قد تكون النتيجة سليما أو معيبا، وفي عملية التشخيص الطبي، يكون المريـض مصابا أو غير مصاب... إلخ.

إذا كان احتمال كل ناتج من النواتج هو نفسه في كل المحاولات، عندها يقال إن هذه المحاولات هي محاولات برنولي (Bernoulli trials) وتسمى التجربة التي تحتوي على n من محاولات برنولي بتجربة ذات الحدين (binomial experiment).

بعبارة أخرى، تسمى التجربة بتجربة ذات الحدين إذا حققت الخـصـائـص التالية:

(أ) تحتوي التجربة على n من المحاولات، ونواتج كل محاولة يمكن أن تكون على صورة نجاح (success)، ويرمز له بالرمز S، أو فشل (failure)، ويرمز له بالرمز F.

(ب) احتمال نجاح المحاولة يرمز له بالرمز P ويبقى ثابتًا لكل المحاولات.

(جـ) كل المحاولات مستقلة.

(د) يكون عدد مرات إجراء التجربة عددًا ثابتًا n.

في تجربـة ذات الحدين، إذا كان المتـغير العشـــوائي المنفصل X يمثـل عــدد حالات النجاح في n من المحاولات، فإن المتغير العـشوائي المنـفـصل X يــسمى بمـتـغـير ذي الحـديـــن (binomial randon variable)، ودالة كثافة الاحتمال تسمي التوزيـع الاحتمالي لذي الحدين أو توزيع ذي الحدين الاحتمالي (binomial probability distribution).

يأخذ المتغير العشوائـي X أي قيمة. عندما يأخذ المتغير العشوائي المنفصـل X قيمة من هذه القيم، ولتكن x، فإن دالة كثافة الاحتمال في توزيع ذي الحدين تعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} \quad , x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

حيـث إن $q = 1 - p$ هو احتمال فشل المحاولة. من الواضـح أن لـدالـة الاحتمال في توزيع ذي الحدين معلمتـين (two parameters)، هما n, p، ويرمز

للدالة بالرمز $b(x;n,p)$. هذه الدالة من أكثر الدوال التوزيعية استخدامًا خاصة في التجارب التي يكون لها ناتجان فقط. يرجع الفضل في إيجاد دالة الاحتمال السابقة إلى عالم الرياضيات السويسري جاكوب برنولي (J. Bernoulli) في الفترة (1654–1704) الذي كان جل عمله منصبًا في نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها.

١ ,٢ ,٦ بناء توزيع ذي الحدين

لإيجاد علاقة رياضية تحدد احتمال الحصول على عدد x حالة نجاح في n محاولة في تجربة ذات الحدين نتبع ما يلي:

تحتوي تجربة ذات الحدين على n من محاولات برنولي، وكل محاولة تتضمن ناتجين فقط؛ إمّا نجاح المحاولة أو فشلها، ويرمز لها بالرمزين S أو F على التوالي. يحتوي فراغ العينة لهذه التجربة على 2^n نقطة عينة أو نواتج. كل نقطة عينة أو ناتج هي متتابعة $(a_1, a_2, ..., a_n)$ حيث إن كل (a_i) هي S أو F. نريد إيجاد احتمال نواتج التجربة إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد حالات النجاح (S) المتوقعة. فمثلاً احتمال الحصول على عدد 0 حالة نجاح أو عدم الحصول على أية حالة نجاح، وهو $P(X = 0)$، وفي هذه الحالة فإن كل نقطة عينة تمثل بمتتابعة $(a_1, a_2, ..., a_n)$، وكل (a_i) عبارة عن الحصول على F؛ أي أن كل نقطة عينة هي متتابعة من F؛ أي أن $(a_1, a_2, ..., a_n) = (F, F, ..., F)$ وحيث إنه في كل محاولة يتحقق احتمال أو نجاح المحاولة، ويرمز له بالرمز $P(S) = p$ ، واحتمال عدم تحقق المحاولة أو فشلها، ويرمز له بالرمز $P(F) = q$ ، علما بأن كل المحاولات مستقلة.

باستخدام قانون الضرب الاحتمالي نحصل على:

$$\begin{aligned} P(FF \dots F) &= P(F) \,.\, P(F) \dots P(F) \\ &= q \,.\, q \dots q \\ &= q^n \end{aligned}$$

بذلك يكون احتمال الحصول على 0 حالة نجاح هو $P(X = 0) = q^n$.
وبالمثل يمكن لإيجاد احتمال الحصول على حالة نجاح واحدة؛ أي أن $p(X=1)$، وفي هذه الحالة نلاحظ وجود محاولة واحدة ناجحة، بينما يكون كل بقية المحاولات وعددها n-1 فاشلة. تكون الحادثة عبارة عن ظهور حالة نجاح واحدة (S) و (n-1) حالة فشل (F) دون أهمية للترتيب، وتكون الحادثة عبارة عن المتتابعة (SFFF.........F) واحتمالها هو $p\,q^{n-1}$، وقد تكون الحادثة عبارة عن المتتابعة (FFSF.........F) واحتمالها هو نفسه كما هو الحال في المتتابعة الأولى. بعبارة أخرى، احتمال أي متتابعة تحتوي على حالة نجاح S و n-1 حالة فشل F هو $p\,q^{n-1}$، حيث إن عدد الطرق الممكنة التي تظهر بها المتتابعات المتنافية المحتوية على حالة واحدة (S) و (n-1) حالة F هو $\binom{n}{1}$، فإن احتمال الحصول على حالة نجاح واحدة بالضبط هو:

$$P(X = 1) = \binom{n}{1} p\,q^{n-1}$$

وهكذا يمكن إيجاد كل الاحتمالات الممكنة عندما يأخذ المتغير العشوائي X القيم ... ,3 ,2، وبصفة عامة فإن احتمال الحصول على متتابعة تحتوي على x حال نجاح وn-x حالة فشل هو $p^x q^{n-x}$، وحيث إن عدد الطرق الممكنة التي يمكن أن تظهر بها المتتابعات المتنافية المحتواة على x حالة نجاح وn-x حالة فشل هو $\binom{n}{x}$، ويكون احتمال الحصول على x حالة نجاح في n محاولة هو:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \ , \ x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

والصيغة الرياضية الأخيرة هي توزيع ذي الحدين الاحتمالي أو دالة كثافة الاحتمال لتوزيع ذات الحدين.

ملاحظة ١, ٢, ٦

يمكن ملاحظة أن توزيع ذي الحدين أخذ هذه التسمية من مفكوك ذات

الحدين (binomial expansion) $(p+q)^n$ حيث إن الاحتمالات

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \ , \ x = 0, 1, 2, ..., n$$

هي عبارة عن الحدود المتتالية في مفكوك ذي الحدين $(p+q)^n$؛ أي أن:

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} (p+q)^n$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} q^{n-1} p + ... \binom{n}{0} p^n$$

$$= b(0; n, p) + b(1; n, p) + ... + b(n; n, p)$$

كما يمكن ملاحظة أن مجموع هذه الاحتمالات يساوي واحدا؛ أي أن:

$$\sum_{x=0}^{n} b(x; n, p) = 1 \quad \text{أو} \quad \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1$$

لأن $p+q=1$ ، وهذه هي خاصية لأي توزيع احتمالي. ويجب ملاحظة أن احتمال الحصول على r حالة نجاح أو أقل، يرمز له بالرمز $P(X<r)$ ، ويمكن حسابه كما يلي:

$$P(X < r) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

وهذا هو توزيع ذي الحدين التراكمي أو دالة توزيع ذي الحدين التراكميـة (cumulative).

مثال ١, ٢, ٦

في تجربة رمي قطعة نقود معدنية 5 مرات، كان المتغير العشوائي المنفصل X يمثل عدد مرات ظهور الصورة (H) والقيم الممكنة للمتغير العشوائي المنفصل X

هي 0, 1, 2, 3, 4, 5، ويمكن حساب احتمالاتها المقابلة كما يلي:

P (عدم ظهور الصورة) $= P(X=0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

P (ظهور صورة واحدة) $= P(X=1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = (5)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$

P (ظهور صورتين) $= P(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = (10)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$

P (ظهور ٣ صور) $= P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (10)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$

P (ظهور ٤ صور) $= P(X=4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = (5)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$

P (ظهور ٥ صور) $= P(X=5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

يمكن الحصول علي هذه الاحتمالات من مفكوك ذي الحدين $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5$

وهذا توزيع ذي الحدين الاحتمالي الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة (H) عند رمي قطعة نقود معدنية 5 مرات، ويمكن التعبير عنه بالجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5
f (x)	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

مثال ٢ , ٢ , ٦

إذا كان احتمال حصول حادثة هو $p = \frac{3}{8}$ ، فأوجد توزيع ذي الحدين لعدد

n= 5 من المحاولات. حيث إن $p = \frac{3}{8}$ إذن $q = 1\text{-}p = \frac{5}{8}$ ، وعليه يكون توزيع ذي الحدين الاحتمالي هو الحدود المتتالية في مفكوك ذي الحدين $\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\right)^5$؛ أي أن:

$$\sum_{x=0}^{5}\binom{5}{x}\left(\frac{3}{8}\right)^{x}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-x} = \binom{5}{0}\left(\frac{3}{8}\right)^{0}\left(\frac{5}{8}\right)^{5} + \binom{5}{1}\left(\frac{3}{8}\right)^{1}\left(\frac{5}{8}\right)^{4} + \binom{5}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{2}\left(\frac{5}{8}\right)^{3}$$

$$+ \binom{5}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^{3}\left(\frac{5}{8}\right)^{2} + \binom{5}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^{4}\left(\frac{5}{8}\right)^{1} + \binom{5}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^{5}\left(\frac{5}{8}\right)^{0}$$

$$= \frac{1}{(8)^5}\left[(5)^5 + (5)(3)^1(5)^4 + (10)(3)^2(5)^3\right.$$

$$\left.+ (10)(3)^3(5)^2 + (5)(3)^4(5)^1 + (3)^5\right]$$

$$= \frac{1}{32768}[3125 + 9375 + 11250 + 6750 + 2025 + 243]$$

$$= 0.99945$$

مثال ٣, ٢, ٦

إذا كان للمتغير العشوائي X توزيع احتمالي بمعلمتين n = 4 و $p = \frac{1}{3}$ ، فأوجد

$$P(X = 1)\ ,\ P\left(X = \frac{3}{2}\right),\ P(X = 3)\ ,\ P(X = 6)\ ,\ P(X < 2)$$

الحـل

توزيع ذي الحدين الاحتمالي عندما $p = \frac{1}{3}$ و n = 4 هو:

$$f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}\quad ,\quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ويكون:

$$P(X=1)=f(1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

$$P\left(X=\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

وذلك لأن المتغير العشوائي X يأخذ في توزيع ذي الحدين، قيمًا صحيحة مثل 0,1,2,....,n

$$P(X=3)=f(3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{4-3}=4\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$$

$$P(X=6)=f(6)=0$$

لأن المتغير العشوائي X يأخذ في توزيع ذي الحدين، قيمًا صحيحة مثل 0,1,2,3,4

$$P(X\leq 2)=\sum_{x=0}^{2} f(x)=f(0)+f(1)+f(2)$$

$$=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4+\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3+\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{16}{81}+\frac{32}{81}+\frac{24}{81}=\frac{72}{81}=\frac{8}{9}$$

مثال ٤ , ٢ , ٦

تقدم محمد وعلي للاشتراك في مسابقة تحفيظ القرآن الدولية. إذا كان احتمال فوز محمد هو 2/3 وإذا أجريت المسابقة 8 مرات، فأوجد احتمال أن يفوز محمد في الحالات التالية:

(أ) ٤ مسابقات بالضبط.

(ب) على الأقل ٤ مسابقات.

(جـ) ٦ مسابقات أو أكثر.

(د) من ٣ إلى ٦ مسابقات.

الحـل :

يمكننا ملاحظة مايلي :

١- يوجد ناتجان هما فوز محمد أو عدم فوزه بالمسابقة.

٢- احتمال فوز محمد في كل مسابقة هو $p = \frac{2}{3}$.

٣- حالات فوز المسابقة أو عدم فوزها مستقلة.

٤- يوجد 8 مسابقات متتالية تم إجراؤها.

من الخواص الأربع يمكن الجزم أن التجربة هي تجربة ذي الحدين، ومن ذلك يكون لدينا توزيع ذي الحدين بمعلمتين $p = \frac{2}{3}$, $n = 8$. إذا كان المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المسابقات التي فاز بها محمد فإن:

(أ) $$P(X = 4) = \binom{8}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1120}{6561}$$

(ب)

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \sum_{x=0}^{3}\binom{8}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{8-x}$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{1}{3}\right)^8 + 8\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^7 + 28\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^6 + 56\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^5\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{6561}\left[1 + 16 + 112 + 448\right]$$

$$= 1 - \frac{577}{6561} = \frac{5984}{6561}$$

(جـ)

$$P(X > 4) = \sum_{x=6}^{3} \binom{8}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{8-x}$$

$$= \binom{8}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \binom{8}{7} \left(\frac{2}{3}\right)^{7} \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{8}{8} \left(\frac{2}{3}\right)^{8}$$

$$= \frac{64}{6561} [28 + 16 + 4]$$

$$= \frac{(46)(48)}{6561} = \frac{1024}{2187}$$

(د)

$$P(3 \le X \le 6) = \sum_{x=3}^{6} \binom{8}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{8-x}$$

$$= \binom{8}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{5} + \binom{8}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4} + \binom{8}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{3} + \binom{8}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$$

$$= \frac{(2)^{3}}{(3)^{8}} [56 + 140 + 224 + 224]$$

$$= \frac{(8)(644)}{6561} = \frac{5152}{6561}$$

مثال ٥ , ٢ , ٦

يستطيع مكتب الإسكان الجامعي توفير السكن المناسب لحـوالـي 75% من الطلبة القادمين إلي الجامعة من خارج المدينة الجامعية . إذا قدم في فترة زمنية معينة

6 طلاب إلى مكتب الإسكان، وبطريقة مستقلة، فأوجد احتمال أن:

(أ) يحصل أقل من 4 طلاب على سكن مناسب.

(ب) يحصل 4 طلاب بالضبط على سكن.

(جـ) يحصل 5 طلاب على الأقل على سكن.

الحـل :

يمكننا ملاحظة مايلي:

١- تتضمن التجربة ناتجين؛ أن أي طالب يحصل على سكن أو لايحصل.

٢- احتمال حصول الطالب على سكن في كل مرة هو $p = \frac{3}{4}$.

٣- قدوم الطلاب إلى مكتب الإسكان يتم بطريقة مستقلة.

٤- يوجد 6 طلاب.

يسمى هذا النـــوع من التجارب التي تتوفر فيها الخواص السابقة الذكر من (١) إلى (٤) «تجربة ذات الحدين». ويمكن الحصول على توزيـع ذي الحـديـن الاحتمالي بمعلمتين $n = 6 \;,\; p = \frac{3}{4}$.

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الطلاب الذين يحصلون على سكـن مناسب فإن:

(أ)

$$P(X < 4) = \sum_{x=0}^{3} \binom{6}{x} \left(\frac{3}{4}\right)^{x} \left(\frac{1}{4}\right)^{6-x}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{6} + \binom{6}{1}\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{5} + \binom{6}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{4} + \binom{6}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{6} \left[1 + (6)(3) + (15)(9) + (20)(27)\right]$$

$$= \frac{694}{4096} = 0.169$$

(ب)
$$P(X=4) = \binom{6}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2$$
$$= \frac{(15)(81)}{(4)^6} = \frac{1215}{4096} = 0.297$$

(جـ)
$$P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{6}\binom{6}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{6-x}$$
$$= \binom{6}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right) + \binom{6}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^6\left[(6)(3)^5 + (3)^6\right]$$
$$= \frac{2187}{4096} = 0.534$$

٦,٢,٢ التوزيع التكراري لذي الحدين

إذا ضربنا توزيع ذي الحدين الاحتمالي بالعدد N، الذي يمثل عدد التجارب أو المجموعات، فإن التوزيع في هذه الحالة يعرف بالتوزيع التكراري لذي الحدين، ويكون التكرار المتوقع لعدد x حالة نجاح في N من التجارب هو

$$N \cdot \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث إن كل n محاولة هي تجربة واحدة أو مجموعة واحدة.

مثال ٦,٢,٦

في تجربة رمي 6 قطع نرد 729 مرة، ما توقع ظهور الرقم 5 أو 6 في 3 قطع نرد على الأقل؟

الحـل

احتمال الحصول على الرقم 5 أو 6 عند رمي زهرة نرد هو $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$،
وعند رمي 6 قطع نرد نحصل على 729 = !6 مجموعة التوزيع التكراري لذي الحدين يعطى كالتالي: $729\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^6$، ومنه يكون عدد مرات ظهور العدد 5 أو 6 في 3 قطع نرد على الأقل هو:

$$729\sum_{x=3}^{6}\binom{6}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x} = 729\left[\binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3+\binom{6}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2+\binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^6\right]$$

$$= \frac{729}{(3)^6}\left[160 + 60 + 12 + 1\right] = 233$$

٦,٢,٣ خواص توزيع ذي الحدين

ندرس من خواص توزيع ذي الحدين متوسط حالات النجاح وتباين حـالات النجاح ومقاييس الالتواء والتفرطح، وكذلك معرفة شكل التوزيع. ولأنه يمكن الحصول على المتوسط ، والتباين، ومقاييس الالتواء، والتفرطح عادة من العزوم الأربعة الأولى لمتغير ذي الحدين X فسنحاول أولا إيجاد العزوم الأربعة في توزيع ذي الحدين.

إذا كان X متغيرًا عشوائيا في توزيع ذي الحدين $b(x;n,p)$ فإن العزوم حول الصفر تعطى بالعلاقة التالية:

$$\mu'_r = E(X^r)$$

(أ) العزم الأول حول نقطة الأصل (الصفر) هو:

$$\mu_1' = E(X)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, ..., n$$

$$= 0 . q^n + 1 . \binom{n}{1} q^{n-1} p + 2 . \binom{n}{2} q^{n-2} p^2 + ... + n p^n$$

$$= np \left\{ q^{n-1} + \binom{n-1}{1} q^{n-2} p + \binom{n-1}{2} q^{n-3} p^2 + ... + p^{n-1} \right\}$$

$$= np (p + q)^{n-1}$$

$$= np$$

وذلك لأن $p + q = 1$ ، وبذلك يكون متوسط حالات النجاح هو np ، وبالمثل فإن متوسط حالات الفشل هو nq.

(ب) العزم الثاني حول نقطة الأصل هو:

$$\mu_2' = E(X^2)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x^2 = x(x-1) + x \text{ حيث إن}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} + n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x}$$

$$= np (p + q)^{n-1} + n(n-1) p^2 (p + q)^{n-2}$$

$$= np + n^2p^2 - np^2$$

$$= n^2p^2 - npq$$

وذلك لأن $q = 1 - p$ ومنه نجد أن:

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$= n^2p^2 + npq - (np)^2$$

$$= npq$$

وهذا هو تباين عدد حالات النجاح، ويكون الانحراف المعياري لعدد حالات النجاح هو:

$$\sigma_x = \sqrt{npq}$$

(جـ) العزم الثالث حول نقطة الأصل هو:

$$\mu_3' = E(X^3)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^3 \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \left[x(x-1)(x-2)+3x(x-1)+x\right] \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث إن $x^3 = x(x-1)(x-2)+3x(x-1)+x$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)(x-2) \frac{n!}{(x-1)!\ (n-x)!} p^x q^{n-x} + 3\sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!\ (n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$+ \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= n(n-1)(n-2)p^3(p+q)^{n-3} + 3n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1}$$

$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$$

(د) العزم الرابع حول نقطة الأصل هو:

$$\mu_4' = E(X^4) = \sum_{x=0}^{n} x^4 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

وحيث إن x^4 يمكن كتابتها على الصورة:

$$x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x$$

فيكون

$$\mu_4' = \sum_{x=0}^{n} \left[x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x \right] f(x)$$

ومن ذلك يمكننا الحصول على:

$$\mu_4' = n(n-1)(n-2)(n-3)p^3 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np$$

باستخدام العلاقة بين العزم حول الوسط الحسابي وحول الصفر، نجد أن العـزم الثالث حول الوسط الحسابي هو:

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$

وبالتعويض عن μ_1' و μ_2' و μ_3' بقيمها نحصل على:

$$\mu_3 = \left[n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np \right] - 3np\left[n^2p^2 - np^2 + np \right] + 2n^3p^3$$

$$= np\left[1 - 3p + 2p^2 \right]$$

$$\mu_3 = np(1-p)(1-2p)$$

$$= npq(q-p)$$

وبالمثل يمكن الحصول على العزم الرابع حول الوسط الحسابي:

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^3\mu_2' - 3\mu_1'^4$$

وبالتعويض عن μ_1' و μ_2' و μ_3' و μ_4' بقيمها مع الاختصار نجد أن:

$$\mu_4 = n^4(p^4-q^4)+n^3(-6p^4+6p^3+6p^3-6p^4)$$

$$+ n^2(11p^4-18p^3+7p^2-4p^2+12p^3-8p^4)+n(-6p^4+12p^3-7p^2+p)$$

$$= 3n^2p^2(1-p)^2 + np(1-p)(1-6p+6p^2)$$

$$= 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$$

$$= npq[1 + 3(n-2)pq]$$

من تعريف معامل الالتواء نجد أن:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{npq\ (q-p)}{(\sqrt{npq}\ )^3}$$

$$= \frac{npq\ (1-2p)}{npq\sqrt{npq}} = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$$

ومن تعريف معامل التفرطح:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{(S^2)^2} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

$$= \frac{3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)}{n^2p^2q^2}$$

$$= \frac{npq\ (3npq + 1 - 6pq)}{n^2p^2q^2}$$

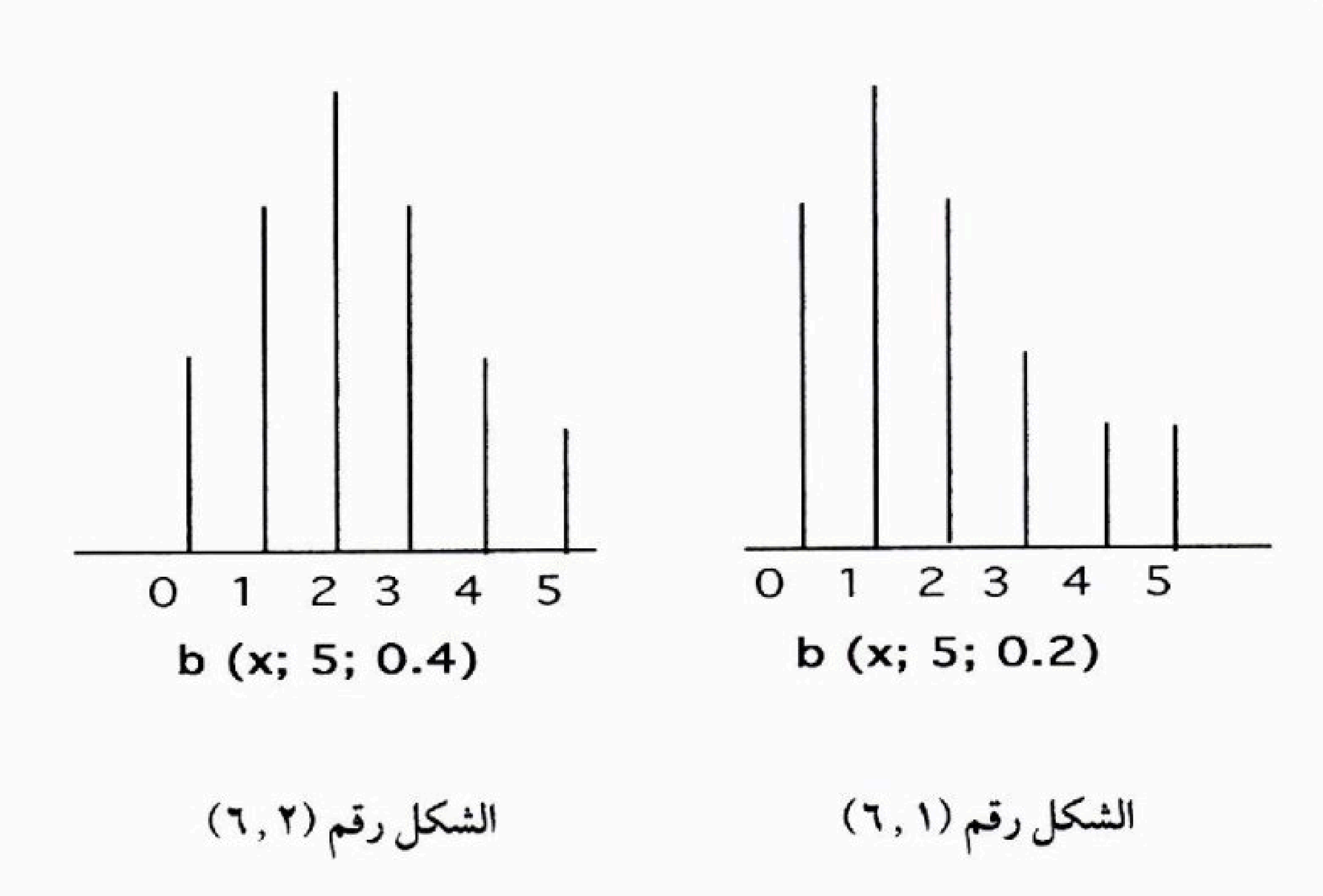
$$= \frac{3npq + 1 - 6pq}{npq}$$

$$= 3 + \frac{1-6pq}{npq}$$

يمكننا ملاحظة أنه عندما تؤول n إلى مالا نهاية، فإن معامل الالتواء α_3 يؤول إلى الصفر، ويؤول معامل التفـرطـح α_4 إلى 3. أي بعبارة أخرى، إن معاملي الالتواء والتفرطح في توزيع ذي الحدين يؤولان إلى معاملـي الالـتـواء والتفرطح في التوزيع الطبيعي عندما تؤول n إلى ما لانهاية؛ أي أن:

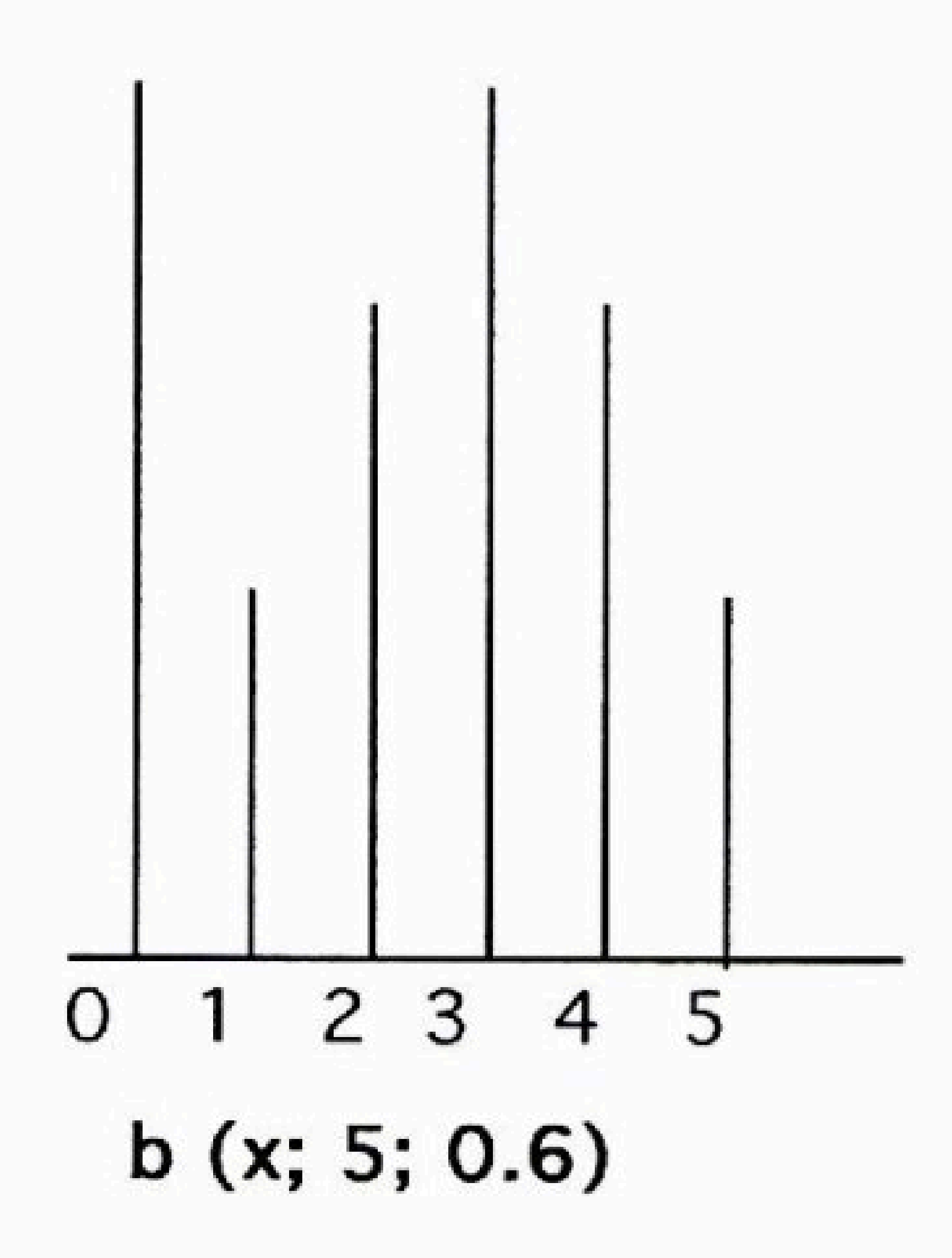
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_3 = 0 \quad , \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_4 = 3$$

أي أن شكل توزيع ذي الحدين يعتمد على قيم المعلمتين n, p كما سنرى في الأشكال البيانية التالية:

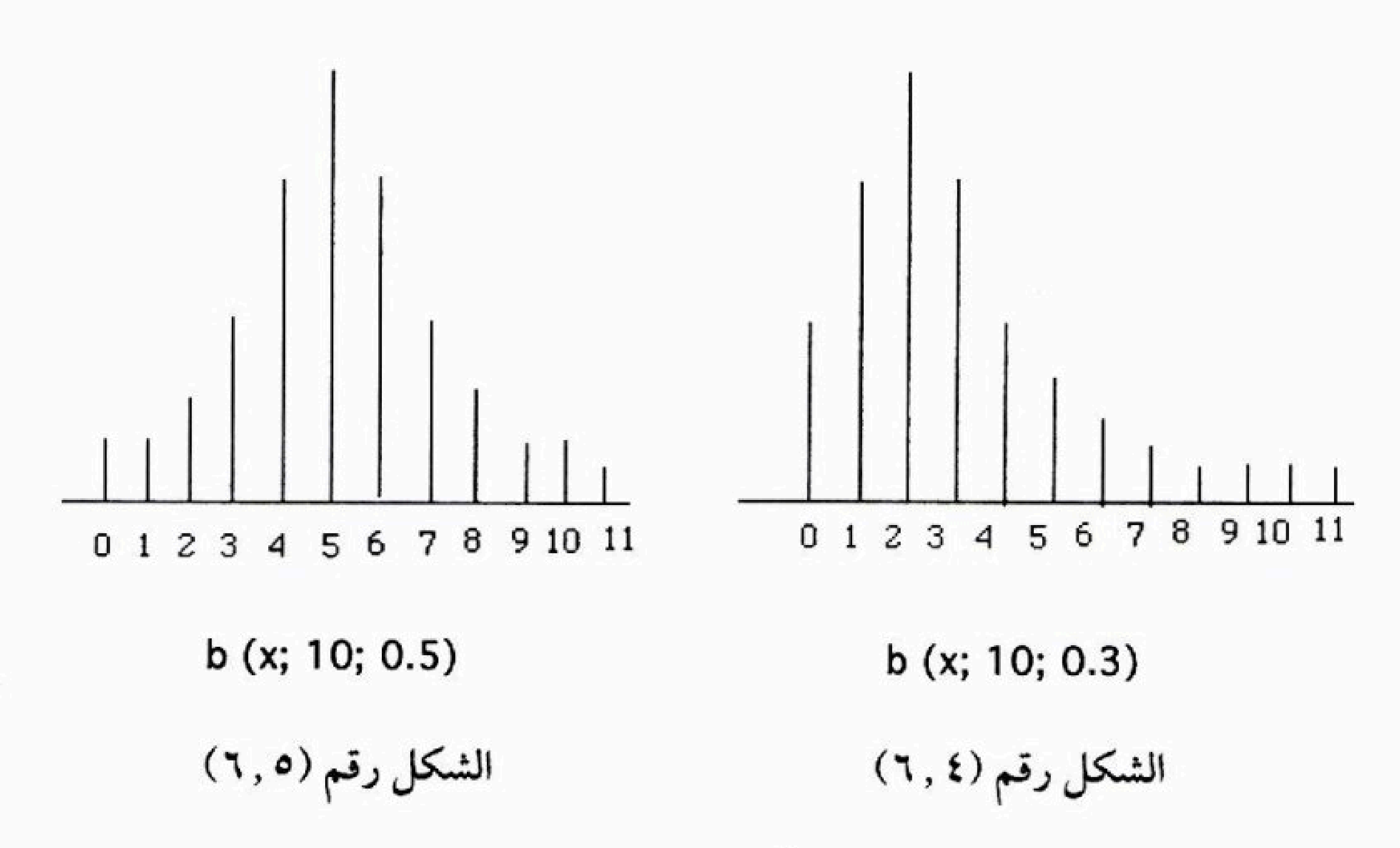


الشكل رقم (١ , ٦)

الشكل رقم (٢ , ٦)



الشكل رقم (٣, ٦)



الشكل رقم (٥, ٦)

الشكل رقم (٤, ٦)

نلاحظ أنه عندما تـكـون $p < \frac{1}{2}$ فإن التوزيع يكون موجب الالـتـواء. وعندما تكون $p > \frac{1}{2}$ فإن التوزيع يكون سالب الالتواء. وبصفة عامة، عندمـا

يكون $p \neq q$ يكون التوزيع ملتـويًا. وعندما تكـون $p = \frac{1}{2}$ يكون التوزيـع متماثلا. وكما ذكرنا سابقًا، إنه كلما ازداد عدد المحاولات n إلى ∞ فإن معاملي الالتواء والتفرطح في توَزيع ذي الحدين يؤولان إلى معاملي الالتواء والتفرطح في التوزيع الطبيعي (المعتدل)، أي أنه عندما تكـون n كبيرة جداً، فإن توزيع ذي الحدين متماثل ومعتدل التفرطح.

من الصيغة الرياضية (المكررة) لاحتمالات توزيع ذي الحدين:

$$b(x;n,p) = \frac{n-x+1}{x} \cdot \frac{p}{q} \cdot b(x-1;n,p)$$

خواص أخرى لتوزيع ذي الحدين: من الواضح أن الصيغة الرياضية السابقة تعطي الدالة f(x) بمعلومية الدالة f(x-1) التي يمكن الحصول عليها كما يلي:

في توزيع ذي الحدين، إذا كان لدينا الحادثة $X = x$ فإننا نحصل على:

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

وإذا كان لدينا الحادثة $X = x - 1$ نحصل على:

$$b(x-1;n,p) = \binom{n}{x-1} p^{x-1} q^{n-x+1}$$

بقسمة $b(x;n,p)$ على $b(x-1;n,p)$ نحصل على:

$$\frac{b(x;n,p)}{b(x-1;n,p)} = \frac{\dfrac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}}{\dfrac{n!}{(x-1)!\,(n-x+1)!} p^{x-1} q^{n-x+1}}$$

$$= \frac{(x-1)!\,(n-x-1)!\,p^x q^{n-x}}{x!\,(n-x)!\,p^{x-1} q^{n-x+1}}$$

$$= \frac{n-x+1}{x} \cdot \frac{p}{q}$$

$$= 1 - \frac{x-(n+1)p}{xq}$$

من الواضح أن $\frac{x - (n+1)p}{xq} - 1$ أكبر من الواحد عندما تـكـون $x < (n + 1)p$
وأصغر من الواحد عندما تكون $x > (n+1)p$ أي أن قيم $b(x;n,p)$ تزداد بزيادة x عندما $0 \le x \le (n+1)p$ وتنقص بنقصان x عندما تكون $(n+1)p \le x \le n$.
وعندما تكون $x = (n+1)p$ فإن $P(X = x) = P(X = x-1)$. من ذلك نلاحظ أن توزيع ذي الحدين وحيد المنوال.

مثال ٦,٢,٧

تقدم 24 مرشحًا في امتحان شهادة البكالوريوس في تخصص الرياضيات. إذا كان احتمال اجتياز الامتحان هو $\frac{1}{3}$ فأوجد متوسط وتباين التوزيع.

الحـل

حيث إن $n = 24$, $p = \frac{1}{3}$ فإن $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

إذن الوسط الحسابي هو:

$$\mu = np = 24.\frac{1}{3} = 8$$

والتباين هو:

$$\sigma^2 = npq = 24 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3} = 5.33$$

٦,٢,٤ مطابقة توزيع ذي الحدين لمجموعة من البيانات

نريد هنا معرفة كيفية تطبيق توزيع ذي الحدين إلى مجموعة من البيانات أو المشاهدات (observed data)، ومدى ملاءمة ومطابقـة (fitting) ذلك التوزيع فـي وصف هذه البيانات؛ أي بعبارة أخرى، نريد معرفة قيم المعلمتـين n, p اللتين

تميزان وتحددان توزيع ذي الحدين، حساب الاحتمالات $f(x)$ وكذلك التكرارات المتوقعة لكل القيم الممكنة $x = 0, 1, 2, ..., n$ لمتغير ذي الحدين X.

فرضنا أن لدينا توزيعًا تكراريًا بخصائص أو بمميزات توزيع ذي الحدين النظري. كخطوة أولى نقوم بحساب متوسط التوزيع التكراري، الذي نرمز له بالرمز $\overline{x}$، يمكن اعتبار قيمة $\overline{x}$ قيمة تقديرية (تخمينية) للوسط μ. ويمكن مساواة هذه القيمة بالتوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) في توزيع ذي الحدين np. الآن يمكن الحصول على قيمة p وبمعرفة قيمة p يمكن حساب كل التكرارات المتوقعة. نورد الآن مثالا لتوضيح ذلك.

مثال ٨ , ٢ , ٦

ادرس مطابقة توزيع ذي الحدين للبيانات التالية التي يمكن الحصول عليها عند رمي قطعة نقود معدنية غير متزنة 5 مرات.

عدد الصور (H)	0	1	2	3	4	5	المجموع
التكرار	12	56	74	39	18	1	200

أولا : متوسط التوزيع التكراري الممثل بالجدول التكراري السابق هو :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=0}^{5} f_i x_i}{\sum_{i=0}^{5} f_i}$$

$$= \frac{0 + 56 + 148 + 117 + 72 + 5}{200}$$

$$= \frac{398}{200} = 1.99$$

ثانيًا: نحاول مساواة هذه القيمة (أي قيمة $\overline{x}$) بالقيمة المتوقعة النظرية في توزيع ذي الحدين؛ أي أن $np = 1.09$.

وحيث إن عدد الرميات $n = 5$ فإن $5p = 1.9$ أو $p = 0.398$.

ويكون توزيع ذي الحدين المطابق لوصف هذه البيانات هو:

$$b(x;5,0.398) = \binom{5}{x} (0.398)^x (0.602)^{5-x}$$

ثالثًا: حساب كل الاحتمالات والتكرارات المقابلة لقيم المتـغـيـر X : إذا رمزنا لعدد الصور بالرمز x، أي أن المتغير العشوائي X في هذه التجربة يمثل عدد مرات ظهور الصورة، وتكون القيم الممكنة للمتغير X هي $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$، وبناء عليه يمكن إعطاء الجدول التالي:

عدد مرات ظهور الصورة(H)	الاحتمال f(x)	التكرار المتوقع
0	$\binom{5}{0} q^5 = (0.602)^5 \quad = 0.07907$	15.8
1	$\binom{5}{1} q^4 p = 5 (0.602)^4 (0.398) \quad = 0.26136$	52.5
2	$\binom{5}{2} q^3 p^2 = 10 (0.602)^4 (0.398)^2 \quad = 0.34559$	69.1
3	$\binom{5}{3} q^2 p^3 = 10 (0.602)^2 (0.398)^3 \quad = 0.22847$	45.7
4	$\binom{5}{4} q p^4 = 5 (0.602) (0.398)^4 \quad = 0.07553$	15.1
5	$\binom{5}{5} p^5 = (0.398)^5 \quad = 0.00998$	2.0
المجموع	= 1.0000	200.0

يمكن القول بأن البيانات لعدد الصورH عند رمي قطعة نقدية خمس مرات مطابقة لتوزيع ذي الحدين. يلاحظ أنه يمكن الحصول على التكرار المتوقع بضرب كل دالة احتمال $f(x)$ بالعدد 200 الذي يمثل مجموع التكرارات. كذلك يلاحظ أنه يمكن حساب الاحتمالات $f(x)$ بواسطة الصيغة الرياضية التالية:

$$b(x;n,p) = \frac{n - x + 1}{x} \cdot \frac{p}{q} \cdot b(x-1;n,p)$$

٥,٢,٦ الدالة المولدة للعزوم والدالة التراكمية في توزيع ذي الحدين

يمكن الحصول على الدالة المولدة للعزوم (mgf) في توزيع ذي الحدين $b(x;n,p)$، ويرمز لها بالرمز $m_b(t)$، من تعريف الدالة المولدة للعزوم حول الصفر كما يلي:

$$m(t) = E\left(e^{tx}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} f(x)$$ من تعريف التوقع الرياضي للمتغير e^{tx}

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$ وحيث إن $f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

إذن:

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x}$$

$$= \left(q + pe^t\right)^n$$

من الواضح أن مفكوك $(q + pe^t)^n$ هو المفكوك الجبري لذي الحدين، ولايحتاج إلى أي تفسير احتمالي.

يمكن الحصول على العزوم بتفاضل الدالة المولدة للعزوم $m(t)$ مرة، ومرتين،

وثلاث . . . إلخ بالنسبة إلى t، ومن ثَم التعويض عن t بالقيمة صفر $(t = 0)$.
لإيجاد العزم الأول حول الصفر نتبع مايلي:

$$\mu_1' = E(X) = \left[\frac{d}{dt}\left(q + pe^t\right)^n\right]_{t=0}$$

$$= \left[npe^t\left(q + pe^t\right)^{n-1}\right]_{t=0}$$

$$= np$$

ولإيجاد العزم الثاني حول الصفر μ_2' :

$$\mu_2' = E(X^2) = \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(q + pe^t\right)^n\right]_{t=0}$$

$$= \left[npe^t\left(q + pe^t\right)^{n-1}\right]_{t=0} + \left[n(n-1)p^2e^{2t}\left(q + pe^t\right)^{n-2}\right]_{t=0}$$

$$= np + n(n-1)p^2$$

ويكون تباين توزيع ذي الحدين باستخدام العزوم هو:

$$\mu_2 = \mu_2' - \left(\mu_1'^2\right)$$

$$= np + n(n-1)p^2 - n^2p^2$$

$$= npq$$

وبالمثل يمكن الحصول على العزم الثالث μ_3'، والعزم الرابع μ_4' أو أي عزوم عليا أخرى.
تعطى الدالة التراكمية (cf) بالعلاقة التالية:

$$K(t) = \log_e m(t) = \log_e\left[(q + pe^t)^n\right] = n \log_e(q + pe^t)$$

$$= n \log\left[q + p\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots\right)\right]$$

$$= n \log\left[1 + pt + p\frac{t^2}{2!} + p\frac{t^3}{3!} + \dots\right]$$

يمكن ملاحظة أن

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

هو مفكوك لورانس للدالة الأسية e^t، وكذلك أن $q = 1 - p$.

ذكرنا سابقاً في سياق حديثنا عن الدالة التراكمية لأي متغير عشوائي، أنه يمكن إيجاد التراكمات الأربعة الأولى. ومن الدالة التراكمية $K(t)$ لتوزيع ذي الحدين تكون التراكمات الأربعة الأولى في توزيع ذي الحدين هي:

$$k_1 = \mu_1 = np$$

$$k_2 = \mu_2 = np(1-p) = npq$$

$$k_3 = \mu_3 = np(1 - p)(1 - 2p) = npq(q - p)$$

$$k_4 = np(1-p)(1 - 6p + 6p^2) = npq(1 - 6pq)$$

مثال ٩ , ٢ , ٦

في توزيع ذي الحدين أثبت أن العلاقة التالية صحيحة:

$$\mu_{r+1} = pq\left(nr\,\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp}\right)$$

ثم أوجد μ_2, μ_3, μ_4 .

الحـل

من تعريف العزم الرائي حول الوسط الحسابي نحصل على

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{n}(j - np)^r \binom{n}{r} p^j q^{n-j} \quad , \quad q = 1 - p$$

وبتفاضل μ_r بالنسبة إلى p نحصل على

$$\frac{d\mu_r}{dp} = -r\,n \sum (j - np)^{r-1}\binom{n}{j} p^j q^{n-j} - \sum (j - np)^r \binom{n}{j} p^j (n-j)\, q^{n-j+1}$$

$$+ \sum (j - np)^r \binom{n}{j} j\, p^{j-1} q^{n-j}$$

$$= -r\,n\,\mu_{r-1} + \sum (j - np)^r \binom{n}{j} p^j q^{n-j}\left[-(n-j)\frac{1}{q} + j.\frac{1}{p}\right]$$

$$= -r\,n\,\mu_{r-1} + \frac{1}{pq}\sum (j - np)^{r+1}\binom{n}{j} p^j q^{n-j}$$

أي أن :

$$\frac{d\mu_r}{dp} = -r\,n\,\mu_{r-1} + \frac{1}{pq}\,\mu_{r+1}$$

بضرب الطرفين بالمقدار pq نحصل على:

$$\mu_{r+1} = pq\left(n\,r\,\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp}\right)$$

بوضع $r = 1, 2, 3$ نحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned}\mu_{r+1} &= \mu_2 \\ &= pq\left(n\,\mu_0 + \frac{d\mu_1}{dp}\right) \\ &= pq\,(n + 0) = npq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{r+1} &= \mu_3 \\ &= pq\left(2n\,\mu_1 + \frac{d\mu_2}{dp}\right) \\ &= pq\left(2n(0) + \frac{d}{dp}(npq)\right) \\ &= pq(0 + n(1\text{-}2p)) \\ &= pq(nq - np) = npq(q - p)\end{aligned}$$

$$\mu_{r+1} = \mu_4$$

$$= pq\left(3n\,\mu_2 + \frac{d\mu_3}{dp}\right)$$

$$= pq\left(3n(npq) + \frac{d}{dp}(np - np^2)(1 - 2p)\right)$$

$$= 3n^2p^2q^2 + npq(1 - 6pq)$$

٦,٣ التوزيع فوق الهندسي الاحتمالي

٦,٣,١ مقدمة

يوجد كثير من التجارب التي ينعدم فيها شرط الاستقلال وكذلك عدم ثبوت احتمال حالة النجاح p في كل المحاولات. يسمى هذا النوع من التجارب «تجارب فوق هندسية» أو (hypergeometric)، وبعبارة أخرى، تحقق التجربة فوق الهندسية الخواص التالية:

١- نواتج كل محاولة يمكن أن تصنف إلى نجاح أو فشل.

٢- احتمال النجاح في كل محاولة متغير من تجربة إلى أخرى.

٣- المحاولات الناجحة غير مستقلة.

٤- يمكن إجراء التجربة عددا ثابتا من المرات.

يتبع المتغير العشوائي X ، الذي يمثل عدد حالات النجاح في هذا النوع من التجارب، التوزيع فوق الهندسي ويسمى متغيراً فوق هندسي.

عندما يأخذ المتغير فوق الهندسي X قيمة x فإن دالة الاحتمال فوق الهندسي تعطى بالصيغة التالية:

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad x = 0, 1, 2, ..., n$$

حيث إن:

N : عدد الوحدات في المجموعة أو المجتمع (سعة المجتمع).

n : عدد الوحدات في المجموعة الجزئية أو العينة (سعة العينة).

K : عدد حالات النجاح في المجموعة أو المجتمع.

تكون لدالة الاحتمال فوق الهندسية معلمات N, n, K، وجميع هذه المعلمات أعداد صحيحة موجبة، ويرمز لدالة الاحتمال فوق الهندسية بالرمز $h(x, N, n, k)$.

يفضل استخدام الدالة فوق الهندسية في الحالات التالية:

(أ) عينة عشوائية سعتها n مسحوبة بدون إحلال من مجتمع ذي عدد نهائي من العناصر N.

(ب) عدد K من الوحدات من نوع (نجاح) وعدد متبقٍ من الوحدات N - K من نوع آخر (فشل).

٦,٣,٢ بناء التوزيع فوق الهندسي

نفرض أن لدينا مجموعة أو مجتمعًا يحتوي على عدد نهائي من العناصر N منها k حالة نجاح والعدد المتبقي منها N - k حالة فشل، وكلتا الحالتين متنافيتان. إذا قمنا باختيار مجموعة جزئية تحتوي على n من العناصر $(n \leq N)$ من المجموعة أو المجتمع وبدون إحلال، فإن عدد الطرق الممكنة التي يمكن بواسطتها اختيار n من N هو $\binom{N}{n}$ طريقة.

إذا كان X متغيرًا عشوائيا يمثل عدد حالات النجاح، وكانت $X = x$ إذا، وإذا فقط، قمنا باختيار x حالة نجاح من k، و n-x حالة فشل من N - k حالة فشل، فإن

عدد الطرق الممكنة التي تم بها اختيار x حالة نجاح و n-x حالة فشل هو:

$$\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}$$

احتمال أن يحتوي X على n عنصر وهي حالات نجاح هو:

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad x=0,1,2,\dots,n$$

وهذه الصيغة للاحتمالات فوق الهندسية.

اكتسب التوزيع فوق الهندسي اسمه من حقيقة أنه يمكن وضع الدالة المولدة للاحتمال في صورة متسلسلات فوق هندسية، كما أن مجموع الاحتمالات يساوي واحدًا فإنه يمكن كتابته كمايلي:

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}=\binom{N}{n}$$

مثال ١,٣,٦

يحتوي صندوق على 4 كرات حمـراء، و 6 كرات سوداء. أختيرت عينة تحتوي على 4 كرات بدون إحلال من ذلك الصندوق. إذا كان X يمثل عدد الكرات الحمراء في العينة، فأوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

الحـل

من الواضح أن التجربة المعطاة تحقق الخواص التالية:

(أ) يمكن تصنيف نواتج كل سحبة كحالة نجاح أو فشل حيث إن النجاح يمثل ظهور الكرة الحمراء، ويمثل الفشل ظهور الكرة السوداء.

(ب) احتمال النجاح متغير في كل عملية سحب.

(جـ) السحبات المتتالية غير مستقلة، وذلك لأن السحب بدون إحلال.

(د) يمكن إجراء السحب في عدد ثابت من المرات وهو $n = 4$.

تسمى هذه التجربة «تجربة فوق الهندسية» ويسمى المتغير العشوائي X الذي يمثل حالات النجاح في هذه التجربة «متغيراً فوق هندسي».

وحيث إن

$$N = 4+6 = 10, k = 4, n = 4$$

القيم الممكنة التي يأخذها المتغير فوق الهندسي X هي: 0, 1, 2, 3, 4 وتكون الاحتمالات لهذه القيم الممكنة (النواتج الممكنة) هي:

$$P(X = 0) = h(0; 10, 4, 4) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{15}{210}$$

$$P(X = 1) = h(1; 10, 4, 4) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{80}{210}$$

$$P(X = 2) = h(2; 10, 4, 4) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{90}{210}$$

$$P(X = 3) = h(3; 10, 4, 4) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{24}{210}$$

$$P(X = 4) = h(4; 10, 4, 4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{6}{5}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{210}$$

يمكن تمثيل دالة الاحتمال فوق الهندسية بالجدول الاحتمالي التالي:

x	0	1	2	3	4
h(x; 10, 4, 4)	15/210	80/210	90/210	24/210	1/210

مثال ٦,٣,٢

يوجد في مرحلة البكالوريوس، في أحد أقسام الرياضيات، عشرة طلاب خمسة منهم من السعوديين وخمسة غير سعوديين. كتبت أسماؤهم في قطع من الورق، فإذا أجريت قرعة لسحب 4 أسماء، فما احتمال أن يكون نصفهم من السعوديين؟

الحل

يمثل المتغير العشوائي X عدد السعوديين وحيث إن

$$N = 5+5 = 10,\ n = 4,\ k = 5.$$

يكون التوزيع فوق الهندسي هو:

$$h(x; 10, 4, 5) = \frac{\binom{5}{x}\binom{5}{4-x}}{\binom{10}{4}}$$

ومنه يمكن إيجاد الاحتمال المطلوب $P(X = 2)$ و هو:

$$h(2; 10, 4, 5) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{10}{12}$$

مثال ٣ , ٣ , ٦

أوجد احتمال أن تحتوي مجموعة ورق اللعب الكاملة على عـدد 2 من نوع إكّـة (aces) إذا سحبت عينة تحتوي على 5 ورقات، وفرضنا أن عدد الورق من نوع إكّـة يمثل حالات النجاح $k = 4$ والحالات المتبقية $N - k = 52 - 4 = 48$ تمثل حالات (فشل ورقات) غير إكّـة؛ أي أن:

$N = 52$, $k = 4$, (عدد الأوراق المسحوبة) $n = 5$, $x = 2$

ويكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(X = 2) = h(2; 52, 5, 4) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{2162}{54145} = 0.0399$$

٣ , ٣ , ٦ خواص التوزيع فوق الهندسي

يتمتع التوزيع فوق الهندسي بعدد من الخواص نذكر منها:

(أ) الوسط (التوقع الرياضي) والتباين للتوزيع فوق الهندسي هما:

$$\mu = np \, , \; \sigma^2 = npq \, \frac{N - n}{N - 1}$$

حيث إن $p = \frac{k}{N} \, , \; q = \frac{N - k}{N}$

إذا كان يتبع للمتغير العشوائي X التوزيع فوق الهندسي المعطى كما يلي:

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N - k}{n - x}}{\binom{N}{n}}$$

فإن المتوسط μ يعطى كالتالي:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{x \cdot k(k-1)! \binom{N-k}{n-x}}{x \cdot (x-1)!\,(k-1)! \binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{k \binom{k-1}{x-1}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

إذا وضعنا $y = x - 1$ فإننا نحصل على:

$$\mu = \frac{k}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{y=0}^{n-1} \binom{k-1}{y}\binom{N-k}{n-1-y}$$

$$= \frac{k}{\binom{N}{n}} \binom{k-1+N-k}{n-1}$$

$$= \frac{kn\,(n-1)!\,(N-n)!}{N\,(N-1)!} \cdot \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}$$

$$= \frac{nk}{N}$$

$$= np$$

حيث إن $p = \frac{k}{N}$.

نلاحظ أن المتوسط (التوقع الرياضي) للتوزيع فوق الهندسي هو نفس المتوسط لتوزيع ذي الحدين.

من تعريف التباين لمتغير عشوائي X:

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

وحيث يمكن كتابة X على الصورة:

$$X^2 = X(X - 1) + X$$

عندئذ يكون:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E[X(X - 1) + X] \\ &= \sum_{x=0}^{n} x \,.\, h(x; N, n, k) + \sum_{x=0}^{n} x(x - 1)\, h(x; N, n, k) \\ &= \frac{nk}{N} + \frac{\sum_{x=0}^{n} x(x - 1) \binom{k}{x}\binom{N - k}{n - x}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{nk}{N} + k(k - 1)\frac{\sum_{x=2}^{n} \binom{k - 2}{x - 2}\binom{N - k}{n - x}}{\binom{N}{n}} \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $y = x - 2$ نحصل على:

$$E(X^2) = \frac{nk}{N} + \frac{k(k-1)\sum_{y=0}^{n-2}\binom{k-2}{y}\binom{N-k}{n-2-y}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{nk}{N} + \frac{k(k-1)\,.\,n(n-1)}{N(N-1)}$$

وحيث إن:

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

نكتب:

$$\sigma^2 = \frac{nk}{N} + \frac{k(k-1)\,.\,n(n-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{nk}{N}\right)^2$$

$$= \frac{nk(N-k)}{N^2} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

$$= npq\,\frac{N-n}{N-1}$$

حيث إن:

$$p = \frac{k}{N}\ ,\ q = \frac{N-k}{N}$$

يمكن الحصول على العزوم العليا الأخرى باتباع نفس الخطوات السابقة.

(ب) إذا كانت n كبيرة فإن التوزيع فوق الهندسي يؤول إلى التوزيع ذي الحدين، نفرض أن $p = \frac{k}{N}$ و $k = Np\ ,\ N-k = N(1-p) = Nq$.

عندئذ بالتعويض بهذه القيم في الصيغة فوق الهندسية نحصل على:

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{n!\,(Np)!\,(Nq)!\,(N-n)!}{x!\,(Np-x)!\,(n-x)!\,(Nq-n+x)!\,N!}$$

$$= \binom{n}{x}\frac{(Np)!\,(Nq)!\,(N-n)!}{(Np-x)!\,(Nq-n+x)!\,N!}$$

باستخدام تقريب ستارلينج (Stirling's approximation) وهو أن $n! \approx e^{-n} \,.\, n^n \sqrt{2\pi n}$ على كل المضاريب مع الاختصار نحصل على:

$$h(x; N, n, k) \approx \binom{n}{x}\frac{p^{Np+\frac{1}{2}} \,.\, q^{Nq+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{n}{N}\right)^{N-n+\frac{1}{2}}}{\left(p-\frac{x}{N}\right)^{Np-x+\frac{1}{2}} \,.\, \left(p-\frac{n+x}{N}\right)^{Nq-n+x+\frac{1}{2}}}$$

إذا كانت N كبيرة جدا، فإن كلا من $\frac{x}{N}$, $\frac{n+x}{N}$ يؤول إلى الصفر.

ويمكن كتابة الصيغة السابقة كمايلي:

$$h(x; N, n, k) = \binom{n}{x} p^x\, q^{n-x} = b(x; n, p)$$

٤,٦ توزيع بواسون

١,٤,٦ مقدمة

يرجع الفضل في هذا التوزيع إلى العالم الرياضي الفرنسي بواسون (Poisson) في الفترة (1781-1840) وقد قدمه في عام 1837 كما يلي:

١- نهاية تقريب توزيع ذي الحدين $b(x; n, p)$ عندما يكون احتمال النجاح p صغيرًا جدًا، ويكون عدد المحاولات n كبيرًا جدًا، عندئذ يكون حاصل الضرب $\mu = np$ معتدل القيمة.

٢- كتوزيع في حد ذاته، وذلك عندما تتحقق عملية بواسون (Poisson process) التي تتمثل في وجود حوادث بصورة عشوائية خلال فترة زمنية أو مكانية معينة. تتمثل هذه الحوادث العشوائية في عدد الوفيات، وعدد المكالمات الهاتفية الواصلة في دقيقة إلى مشغل الهواتف، وعدد سيارات الأجرة الواصلة إلى تقاطع خلال يوم ما، وعدد الأشخاص المولودين صما خلال سنة في مدينة ما، وعدد الأخطاء الطباعية في كل صفحة من كتاب معين، وعدد كريات الدم الحمراء في شخص ما، عدد الذبذبات الواصلة خلال فترة زمنية معينة، . . . إلخ. وبصفة عامة، يستعمل الإحصائيون توزيع بواسون (Poisson distribution) كتقريب عندما تكون p مساوية 0.5 أو أقل وعندما تكون n مساوية 20 أو أكثر. نلاحظ أن التقريب يكون أفضل كلما كبرت أو ازداد مقدار n وقلت قيمة p. إذا افترضنا أن n تؤول إلى مالانهاية ($n \longrightarrow \infty$) و p تؤول إلى الصفر ($p \longrightarrow 0$) في الوقت الذي يكون فيه حاصل الضرب $\mu = np$ ثابتا فإن نهاية التقريب لذي الحدين هي:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} b(x ; n , p) = \frac{\mu^{x} e^{-\mu}}{x!}, \quad x = 1,2, . . \infty$$

حيث إن $e \; 2.71828$.

لتوزيع بواسون معلمة واحدة هي $\mu > 0$ ، ويرمز لتوزيع بواسون بالرمز $P(x; \mu)$. يمكن تفسير المعلمة μ على أنها متوسط التغير في ظهور الحوادث.

وتوزيع بواسون الاحتمالي هو دالة موجبة (non-negative)؛ أي أن $P(x; \mu) \geq 0$ ويكون مجموع الاحتمالات مساويا الوحدة؛ أي أن:

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x;\mu) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$= e^{-\mu}\left[1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= e^{-\mu} . e^{\mu} = 1$$

يسمى توزيع بواسون الاحتمالـي أيـضًا بقانون الأعداد الصغيـرة (law of small numbers) ، أو توزيع الأحداث النادرة، وتكثر استخداماته وتطبيقاته فـي العمليات البيولوجية والفيزيائية والعمليات البحثية وعلوم الإدارة . . . إلخ.

٢ , ٤ , ٦ بناء تقريب توزيع بواسون لذي الحدين

لإيجاد صيغة تقريبية لتوزيع ذي الحدين عندما تؤول n إلى مالانهاية وتؤول p إلى الصفر، وعندما يكون حاصل ضربهما $\mu = np$ يساوي مقدارا ثابتا نتبع مايلي:

يمكن كتابة توزيع ذي الحدين $b(x; n, p)$ كما يلي:

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-x+1)}{x!} p^x q^{n-x}$$

لنضع $\mu = np$ فيكون:

$$p = \frac{\mu}{n} , \quad q = 1 - p = 1 - \frac{\mu}{n}$$

نعوض في الصيغة الرياضية السابقةعن p لنحصل على:

$$b(x;n,p) = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-x+1)}{x!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\mu^{x}}{x!}\ \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-x+1)}{n^{x}}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{\mu^{x}}{x!}\left[1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}$$

إذا بقي $\mu = np$ ثابتًا ومقدار n كبيرًا جدًا، فإنه يمكن ملاحظة أن كلا من الحدود التالية يؤول إلى الوحدة

$$\left(1-\frac{1}{n}\right),\left(1-\frac{2}{n}\right),\ \ldots,\left(1-\frac{x-1}{n}\right),\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}$$

لكن يمكن كتابة الحد $\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}$ على الصورة :

$$\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n} = \left[\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}\right]^{\mu}$$

إذا وضعنا $k = \frac{n}{\mu}$ يمكن إعادة كتابة الحد السابق على الصورة:

$$\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n} = \left[\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\mu}$$

من الواضح أنه إذا ازدادت n تزداد كذلك k وبذلك يؤول المقدار $\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k}$ إلى e^{-1} حيث إن $e \approx 2.71828$، ويكون:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$$

إذن تعطى نهاية الاحتمال $P(X = x)$ بالصيغة الرياضية التالية:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} b(x; n, p) = \frac{\mu^x}{x!} \; 1.1....1.e^{-\mu} = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad , \; x = 0, 1, 2, ...$$

بعبارة أخرى، إذا كان X متغيراً ذي حدين بحيث إن:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

فإن:

$$\lim_{\substack{n \longrightarrow \infty \\ np \longrightarrow \mu}} P(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad , \; x = 0, 1, 2, ...$$

يرمز لهذا التوزيع بالرمز $P(x; \mu)$ ويسمى بدالة احتمال توزيع بواسون، ويقال للمتغير العشوائي المرافق للدالة $P(x; \mu)$ بأنه يتبع توزيع بواسون ذو معلمة μ.

مثال ١ , ٤ , ٦

أتمت مجموعة مكونة من 200 مسافر حجوزاتهم في رحلة جوية من أبها إلى الرياض. إذا كان احتمال أن يفقد مسافر حجزه، لأسباب عدم التأكيد في المدة المحددة أو عدم دقة معلومات الحجز، هو 0.01، فما احتمال أن يفقد ثلاثة بالضبط حجوزاتهم؟

الحل

إذا فرضنا أن عدم وجود الحجز أو فقده يمثل عملية النجاح، فإن ذلك يعطي تجربة ذي الحدين، ويتبع المتغير العشوائي X، الذي يمثل عدد حالات النجاح،

توزيع ذي الحدين.

من الملاحظ أن $n = 200$ والاحتمال $p = 0.01$ ، وحيث إن p صغيرة جدا و n كبيرة، فإنه يستحسن استخدام توزيع بواسون عندما $\mu = np = (200)(0.01) = 2$.

ويكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(X = 3) = P(3; 2) = \frac{(2)^3 \, e^{-2}}{3!}$$

$$= \frac{(8)\,(0.1353)}{6}$$

$$= 0.1804$$

حيث إن
$$e^{-2} = \frac{1}{e^2} = \frac{1}{(2.71828)^2} = 0.1353$$

مثال ٢ , ٤ , ٦

احتمال انتهاء صلاحية لمبة كهربائية (مصباح) تعمل لمدة 50 أسبوعًا خلال أسبوع هو 0.01125 . إذا كان لدينا 12 لمبة كهربائية من النوع نفسه، فما احتمال أن تدوم 11 لمبة على الأقل لمدة 51 أسبوعاً؟

الحـل

نحسب الاحتمال المطلوب باستخدام توزيع بواسون وذلك لأن $p = 0.01125$ و $n = 12$ وأن احتمال انتهاء الصلاحية صغير جدا ويساوي 0.01125 .

فيكون $\mu = np = (12)(0.01125) = 0.135$ ، وتوزيع بواسون هو:

$$P(x; 0.135) = \frac{e^{-0.135}\,(0.135)^x}{x!}$$

الآن احتمال عدم وجود لمبة منتهية صلاحيتها هو:

$$P(X = 0) = P(0; 0.135) = \frac{e^{-0.135}\,\mu^0}{0!} = e^{-0.135}$$

$$= 1 - 0.135 + \frac{(0.135)^2}{2!} - \frac{(0.135)^3}{3!} + \ldots$$

$$= 0.8737$$

والمقدار الأخير يكافئ احتمال صلاحيــة 12 لمبة كهربائية، بينما يــكــون احتمال وجود لمبة كهربائية واحدة منتهية صلاحيتها هو:

$$P(X = 1) = P(1; 0.135) = \frac{e^{-0.135}\,(0.135)^1}{1!}$$

$$= (0.8737)(0.135)$$

$$= 0.117$$

وهذا يكافئ احتمال وجود 11 لمبة سوف تدوم لمدة تزيد على 51 أسبوعًا. ويكون احتمال أن تدوم 11 لمبة لمدة 51 أسبوعًا على الأقل هو:

$$P(X \le 11) = P(0; 0.135) + P(1; 0.135)$$

$$= 0.8737 + 0.1179$$

$$= 0.9916$$

مثال ٣, ٤, ٦

يأخذ موظف مستودع عينة مكونة من 100 جهاز من مستودعه المليء بالأجهزة التي تمثل نسبة المعيب منها 1% وكان X يمثل عدد الأجهزة المعيبة الموجودة في تلك

الأجهزة. أوجد جدولا للاحتمالات $P(X=x)$ لكل القيم الممكنة $x = 0, 1, 2, 3, 4$ مستخدما توزيع ذي الحدين الاحتمالي وتوزيع بواسون التقريبي.

الحـل

إذا كانت p تمثل احتمال أن يكون الجهاز معيبا، فعليه يكون احتمالات ذي الحدين عندما

$$n = 100,\ p = 0.01,\ q = 0.99$$

هي:

$$P(X=x) = \binom{100}{x} (0.01)^{x} (0.99)^{100-x}\ ,\ \ x = 0, 1, 2, 3, 4$$

وبواسطة تقريب بواسون نستخدم المعلمة:

$$\mu = np = (100)(0.01) = 1$$

وتكون هذه الاحتمالات هي:

$$P(X=x) = P(x; 1) = \frac{1\ .\ e^{-1}}{x!} = \frac{e^{-1}}{x!}\ ,\ \ x = 0, 1, 2, 3, 4$$

ومن ذلك يمكن تمثيل ذلك بالجدول الاحتمالي التالي:

x	P(X = x)	
	ذي الحدين	بواسون
0	0.366	0.3679
1	0.3679	0.3679
2	0.1849	0.1839
3	0.061	0.0613
4	0.0149	0.0153

لاحظ أن النتائج الموضحة بجدول الاحتمال السابق تؤكد حسن أو أفضلية تقريب بواسون.

٣ , ٤ , ٦ توزيع بواسون التكراري

عندما نضرب توزيع بواسون بعدد المجموعات أو التجارب N في كل n محاولة، فإن التوزيع الناتج يعرف بتوزيع بواسون التكراري، أي أن:

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!} \,.\, N \,, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

مثال ٤ , ٤ , ٦

تصنع آلة (ماكينة) قطع نقود معدنية، وعلمنا أن احتمال إنتاج قطعة معدنية معيبة هو0.00. إذا حصلنا على مجموعة مكونة من 10 قطع معدنية، احسب بالتقريب احتمال ألا تحتوي مجموعة مكونة من 10,000 قطعة على قطعة معدنية معيبة. احسب كذلك احتمال أن تحتوي هذه المجموعة على قطعة معدنية معيبة وكذلك قطعتين معيبتين. افترض أن $e^{-0.02} = 0.9802$.

الحـل

احتمال أن تكون القطعة معيبة $p = 0.002$ وأن $n = 10$، وحيث إن p صغيرة جدا، يمكننا تطبيق تقريب بواسون مستخدمين $\mu = np = (10)(0.002) = 0.02$.

من ذلك يكون عدد المجموعات التي لاتحتوي على قطعة معدنية معيبة، أو تحتوي على قطعة معدنية أو تحتوي على قطعتين معدنيتين، يمكن تمثيلهما على أنها القيم الممكنة للمتغير العشوائي X؛ أي أن $x = 0, 1, 2$ ، ويكون

$$N \,.\, P(x;\mu) = 10{,}000\,\frac{(0.02)^{x}\,e^{-0.02}}{x!}$$

بوضع $x = 0$ نحصل على

$$10{,}000 \times e^{-0.02} = 10{,}000 \times 0.9802 = 9{,}802$$

بوضع $x = 1$ نحصل على

$$10,000 \times (0.02)\, e^{-0.02} = 10,000 \times 0.9802 \times 0.02 = 196$$

بوضع $x = 2$ نحصل على

$$10,000\, \frac{e^{-0.02}\,(0.02)^2}{2!} = \frac{10,000 \times 0.9802 \times (0.02)^2}{2} \approx 2$$

٤ , ٤ , ٦ خواص توزيع بواسون

يتمتع توزيع بواسون بعدد من الخواص المهمة، وفيما يلي نستعرض بعضا منها.

١ - المتوسط في توزيع بواسون يساوي التباين.

نفرض أن للمتغير العشوائي X توزيع بواسون $P(x;\mu)$، ومن تعريف التوقع الرياضي يكون المتوسط هو

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, P(x;\mu)$$

لأن

$$P(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!}$$

فإن

$$\mu = 0.e^{-\mu} + 1.\mu.e^{-\mu} + 2.\frac{\mu^2}{2!}e^{-\mu} + \ldots$$

$$= \mu e^{-\mu}\left[1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= \mu e^{-\mu} \,.\, e^{\mu} = \mu$$

الآن نكتب $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

وحيث إن

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(x;\mu)$$

$$= e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \left[x(x-1)+x\right] \frac{\mu^x}{x!}$$

$$= e^{-\mu} \mu^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!} + e^{-\mu} \mu \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \mu^2 + \mu$$

وذلك لأن $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!} = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \ldots = e^{\mu}$

ومن ذلك ينتج أن $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$

وهذا يوضح أن $\sigma^2 = \mu$ في حالة توزيع بواسون.

٢- يمكن إيجاد العزوم العليا (higher moments) لتوزيع بواسون كالتالي:

$$\mu_3' = E(X^3) = \sum_{x=0}^{\infty} x^3 P(x;\mu)$$

يمكن كتابة x^3 على الصورة التالية:

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$$

$$\mu_3' = e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \left[x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x \right] \frac{\mu^x}{x!}$$

$$= e^{-\mu} \mu^3 \sum_{x=3}^{\infty} \frac{\mu^{x-3}}{(x-3)!} + 3e^{-\mu} \mu^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!} + e^{-\mu} \mu \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$\mu_3' = \mu^3 + 3\mu^2 + \mu$$

$$\mu_4' = E(X^4)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^4 P(x; \mu)$$

يمكن كتابة x^4 على الشكل التالي:

$$x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x$$

ومن ذلك يكون

$$\mu_4' = e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \left[x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x \right] \frac{\mu^x}{x!}$$

$$= \mu^4 e^{-\mu} \sum_{x=4}^{\infty} \frac{\mu^{x-4}}{(x-4)!} + 6\mu^3 e^{-\mu} \sum_{x=3}^{\infty} \frac{\mu^{x-3}}{(x-3)!}$$

$$+ 7\mu^2 e^{-\mu} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!} + \mu e^{-\mu} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

أي أن

$$\mu_4' = \mu^4 + 6\mu^3 + 7\mu^2 + \mu$$

من العلاقة بين العزم حول الصفر والعزوم حول الوسط الحسابي نحصل على:

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3 \\ &= \left(\mu^3 + 3\mu^2 + \mu\right) - 3\mu\left(\mu^2 + \mu\right) + 2\mu^3 \\ &= \mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4 \\ &= \left(\mu^4 + 6\mu^3 + +7\mu^2 + \mu\right) - 4\mu\left(\mu^3 + 3\mu^2 + \mu\right) + 6\mu^2\left(\mu^2 + \mu\right) - 3\mu^4 \\ &= 3\mu^2 + \mu\end{aligned}$$

يعطى معامل الالتواء في توزيع بواسون بالعلاقة التالية:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{\mu^2}{\mu^3} = \frac{1}{\mu}$$

ويعطى معامل التفرطح بالعلاقة التالية:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3\mu^2 + \mu}{\mu^2} = 3 + \frac{1}{\mu}$$

من الواضح أن توزيع بواسون هو توزيع ملتو موجب (ملتو ناحية اليمين)، ويصبح التوزيع متماثلا كلما ازدادت قيمة μ؛ أي أنه في حالة أن يؤول μ إلى مالانهاية $(\mu \longrightarrow \infty)$ نحصل على العلاقات التالية:

$$\lim_{\mu \longrightarrow \infty} \alpha_3 = \lim_{\mu \longrightarrow \infty} \frac{1}{\mu} = 0$$

$$\lim_{\mu \longrightarrow \infty} \alpha_4 = \lim_{\mu \longrightarrow \infty} 3 + \frac{1}{\mu} = 3$$

٣- وهذا يعني أنه عندما تؤول μ إلى مالانهاية، فإن معاملي الالتواء والتفرطح في توزيع بواسون يؤولان إلى معاملي الالتواء والتفرطح في التوزيع الطبيعي المتماثل.

٤- إذا كان لدينا متغيران مستقلان X, Y لهما توزيع بواسون بمعلمتين μ, ν فإن لمجموعهما $X+Y$ توزيع بواسون بمعلمة $\mu+\nu$.

البرهان

نعلم أن للمتغير العشوائي X توزيع بواسون $P(x; \mu)$، وأن للمتغير العشوائي Y توزيع بواسون $P(x; \nu)$، ونريد إيجاد الاحتمال $P(X+Y = k)$ حيث إن $k = 0, 1, 2, \ldots$.

إذا كان $k = 0$ فإن

$$P(X+Y = 0) = P(X = 0) \,.\, P(Y = 0)$$
$$= e^{-\mu} \,.\, e^{-\nu}$$
$$= e^{-(\mu+\nu)}$$

في حالة أن $k = 1$ نحصل على:

$$P(X+Y = 1) = P(X = 0) \,.\, P(Y = 1) + P(X = 1) \,.\, P(Y = 0)$$
$$= e^{-\mu}\, \nu\, e^{-\nu} + \mu\, e^{-\mu}\, e^{-\nu}$$
$$= e^{-(\mu+\nu)}(\mu+\nu)$$

وبالمثل في حالة $k = 2$

$$P(X+Y = 2) = \frac{e^{-(\mu+\nu)}}{2!}(\mu+\nu)^2$$

وبصورة عامة، عندما $X+Y = k$ نريد حساب احتمال كل من $X = i, Y = k - i$ حيث إن $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ ويكون:

$$P(X+Y=k) = P(X=0)\,.\,P(Y=k)+P(X=1)\,.\,P(Y=k-1)+...+P(X=k)\,.\,P(Y=0)$$

$$= \frac{e^{-\mu}}{0!}\,\frac{\nu^k\ e^{-\nu}}{k!} + \frac{\mu\, e^{-\mu}}{1!}\,\frac{\nu^{k-1}\ e^{-\nu}}{(k-1)!} + ... + \frac{\mu^k\, e^{-\mu}}{k!}\,\frac{e^{-\nu}}{0!}$$

$$= e^{-(\mu+\nu)}\left[\frac{\nu^k}{k!} + \mu\frac{\nu^{k-1}}{(k-1)!} + ... + \frac{\mu^k}{k!}\right]$$

بضرب الطرف الأيمن بالكمية $\frac{k!}{k!}$ نحصل على:

$$P(X+Y=k) = \frac{e^{-(\mu+\nu)}}{k!}\left[\binom{k}{0}\nu^k + \mu\binom{k}{1}\nu^{k-1} + ... + \mu^k\binom{k}{1}\right]$$

$$= \frac{e^{-(\mu+\nu)}}{k!}(\mu+\nu)^k$$

وهذا هو توزيع بواسون بالمعلمة $\mu+\nu$.

ملاحظة ١ , ٤ , ٦

يمكن تعميم النتيجة $P(X+Y=k) = \frac{e^{-(\mu+\nu)}}{k!}(\mu+\nu)^k$ لأكثر من متغيرين عشوائيين مستقلين.

عكس هذه الخاصية الذي ينص على أنه إذا كان لدينا متغيران عشوائيان مستقلان وحاصل جمعهما $X+Y$ هو توزيع بواسون، فإن لكل من المتغيرين العشوائيين X, Y توزيع بواسون صحيحًا ويمكن إثباته بطريقة مماثلة، ونتركه تمرينًا للقارئ.

٥ , ٤ , ٦ مطابقة توزيع بواسون للبيانات الإحصائية

يمكن أن يتسع توزيع بواسون لمجموعة من البيانات إذا تمكنا من معرفة قيمة معلمتـه μ، التي يمكن الحصول عليها عادة بمسـاواة μ بالمتوسط المحسوب مـن التوزيع التكراري بشرط أن يكون الاحتمال صغيرا جدا.

باستخدام قيمة المتوسط، يمكن حساب التكرارات المتوقـعـة. ونورد المثـال التقليدي التالي لتوضيح ذلك.

مثال ٥ , ٤ , ٦

قام كاحـل (Kahl, 1988) بجمع مجموعة من البيانات تمثل عـدد الخـلايـا الفولكلورية الميتة في بويضات الأغنام خلال 20 أسبوعًا، وكان توزيع هذه الخلايا الميتة كما في الجدول التكراري التالي:

عدد الخلايا الميتة	0	1	2	3	4	المجموع
التكرار	109	65	22	03	01	200

طبق توزيع بواسون لهذه البيانات واحسب التكرارات المتوقعة.

الحـل

نحسب قيمة الوسط الحسابي من التوزيع المعطى بالجدول ونساويها بالوسط μ لتوزيع بواسون. من الجدول نجد أن:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{0 + 65 + 44 + 9 + 4}{200} = \frac{122}{200} = 0.61$$

وهذه قيمة تقديرية أو تخمينية للمعلمة μ؛ أي أن $\mu = 0.61$.

ويكون توزيع بواسون المطابق لهذه البيانات هو:

$$P(x; 0.61) = \frac{e^{-0.61}(0.61)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

يمكن حساب التكرارات المتوقعة لعدد x من الخلايا الميتة بضرب الاحتمالات بالعدد N، الذي يساوي 200 في هذا المثال.

في حالة عدم توافر جدول يوضح قيم $e^{-\mu}$ ، فإنه يمكن حساب ذلك بواسطة اللوغاريتمات كمايلي:

لنفرض أن $y = e^{-0.61}$ ، عندئذ:

$$\log y = -0.61 \log_e = (-0.61)(0.4343) = -0.2649 = \bar{1}.735$$

أي أن $y = 0.5434$.

الآن يمكن حساب الاحتمالات والتكرارات المتوقعة كما هو موضح بالجدول التالي:

عدد الخلايا الميتة x	الاحتمال P(x;0.61)		التكرارت المتوقعة 200xProb.
0	$e^{-0.61}$	= 0.5434	108.68
1	$e^{-0.61}\frac{(0.61)}{1!} = \frac{0.5434 \times 0.61}{1}$	= 0.3315	66.30
2	$e^{-0.61}\frac{(0.61)^2}{2!} = \frac{0.3315 \times 0.61}{2}$	= 0.1011	20.22
3	$e^{-0.61}\frac{(0.61)^3}{3!} = \frac{0.1011 \times 0.61}{3}$	= 0.0206	4.12
4	$e^{-0.61}\frac{(0.61)^4}{4!} = \frac{0.0206 \times 0.61}{4}$	= 0.0031	0.62
5	$e^{-0.61}\frac{(0.61)^5}{5!} = \frac{0.0031 \times 0.61}{5}$	= 0.0004	0.08
المجموع		= 1.0001	= 200.02

ويمكن التعليق بأن توزيع بواسون مطابق لبيانات المثال بدرجة كبيرة جدا.

٦ , ٤ , ٦ عملية بواسون (Poisson Process)

ذكرنا سابقا أنه يمكن الحصول على توزيع بواسون كنهاية لتقريب ذي الحدين. سنوضح هنا أنه يمكن الحصول على توزيع بواسون من عملية بواسون التي تعرف على أنها ظاهرة عشوائية ينتج عنها حدوث حوادث عشوائية في فترة زمنية أو مكانية معينة. فمثلا؛ حدوث الوفيات المرورية خلال شهر في مدينة ما هو عملية بواسون. لاحظ أن عملية بواسون تحقق الخواص التالية:

(أ) احتمال تحقق أو ظهور حدث معين في فترة زمنية قصيرة Δ يساوي تقريبًا $\lambda\Delta$ ، حيث إن λ كمية موجبة ويمكن أن تفسر على أنها معدل الظهور.

(ب) احتمال أن يظهر أكثر من حدث في فترة زمنية قصيرة قليل جدا وجدير بالإهمال.

(جـ) احتمال ظهور الحوادث في فترة زمنية قصيرة مستقل عن ظهور الحوادث في أي فترة زمنية منفصلة أخرى.

يفترض توفر هذه المجموعة من الخواص في مجموعة الحوادث الموجودة عشوائيا في فترة زمنية أو مكانية معينة. يمكن من خلال هذه الخواص القول بأن احتمال عدد مرات الظهور لحادثة عشوائية في فترة ذات طول t يعطى كتوزيع بواسون بالمعلمة λt ؛ أي أن الصيغة الرياضية لعملية بواسون هي:

$$P(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}$$

حيث إن :

t تمثل عدد الوحدات الزمنية، x عدد مرات الظهور في t وحدة زمنية، λ معدل الظهور خلال وحدة زمنية.

مثال ٦ , ٤ , ٦

أجريت مكالمات هاتفية من خلال مشغل هواتف (بـدّالة) في فترات زمنيـة عشوائية بمعدل أربع مكالمات في الدقيقة. إذا افترضنا أن هذه عملية بواسون فحدد احتمال وجود 3 مكالمات أو أكثر في فترة زمنية مقدارها 15 ثانية.

الحـل

إذا أخذنا الدقيقة كوحدة زمنية، عندئذ يكون لدينا 4 مكالمات في الدقيقة؛ أي 4 مكالمات في 60 ثانية؛ أي أن $\lambda = 4$.

وحيث إن 15 ثانية هي $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ دقيقة.

عندئذ تكون الوحدة الزمنية هـنـا هـي: $t = \frac{1}{4}$ ، ويكون معدل عـدد المكالمات في فترة 15 ثانية هو $4 \times \frac{1}{4}$ ؛ أي أن:

$$\lambda t = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

وباستخدام الصيغة الرياضية لعملية بواسون $P(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}$

المطلوب هو حساب احتمال وجود 3 مكالمات أو أكثر في 15 ثانية.

يمكن كتابة هذا الاحتمال على الصورة:

P(وجود 3 مكالمات أو أكثر في فترة زمنية 15 ثانية) = 1 - P(وجود أقل من 3 مكالمات في 15 ثانية)

= 1 - P(وجود 0 ,1 ,2 مكالمات في 15 ثانية) =

$$= 1 - \sum_{x=0}^{2} P(x; \lambda t)$$

$$=1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-1}(1)^x}{x!}$$

$$=1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{0,3679(1)^x}{x!}$$

$$=1 - 0.91975 \quad = 0.08025$$

٧ , ٤ , ٦ الدالة المولدة للعزوم والتراكمات لتوزيع بواسون

يمكن إيجاد الدالة المولدة للعزوم حول الصفر (نقطة الأصل) لتوزيع بواسون كمايلي:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX} P(x;\mu)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$= e^{tX} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\mu e^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-\mu} e^{\mu e^t}$$

$$= e^{\mu(e^t - 1)}$$

يمكن الحصول على المتوسط والتباين كمايلي:

$$\mu_1' = E(X) = \left[\frac{d}{dt}\left\{e^{\mu(e^t-1)}\right\}\right]_{t=0}$$

$$= \left[\mu e^t . e^{\mu(e^t-1)}\right]_{t=0}$$

$$= \mu$$

وكذلك

$$\mu_2' = E(X^2) = \left[\frac{d^2}{dt^2}\left\{e^{\mu(e^t-1)}\right\}\right]_{t=0}$$

$$= \left[\mu e^t . e^{\mu(e^t-1)} + \mu^2 e^{2t} . e^{\mu(e^t-1)}\right]_{t=0}$$

$$= \mu + \mu^2$$

ومن ذلك يكون التباين هو :

$$\sigma^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \mu + \mu^2 - \mu^2 = \mu$$

تعطى الدالة المولدة للتراكمات (cgf) أو الدالة التراكمية لتوزيع بواسون كمايلي :

$$K(t) = \log_e M(t)$$

$$= \mu(e^t - 1)$$

$$= \mu\left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^r}{r!} + \ldots\right)$$

وحيث إن k_r معامــل $\frac{t^r}{r!}$ في $K(t)$ لجميع قيــم r هو $K(t) = \mu$، فإن كل التراكمات في توزيع بواسون مساوية لـ μ.

مثال ٧ , ٤ , ٦

أثبت الصيغة التالية لتوزيع بواسون $P(x; m)$

$$\mu_{r+1} = r\, m\, \mu_{r-1} + m \frac{d\mu_r}{dm}$$

الحـل

من التعريف

$$\mu_r = \sum_{x=0}^{\infty} P(x; m)\,.\,(x - m)^r = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-m}\, m^x}{x!}\,(x - m)^r$$

بالتفاضل بالنسبة إلى m نحصل على

$$\frac{d\mu_r}{dm} = \sum_{x=0}^{\infty}\left[-r\,\frac{e^{-m}\, m^x}{x!}\,(x-m)^{r-1} + x\frac{e^{-m}\, m^{x-1}}{x!}\,(x-m)^r - \frac{e^{-m}\, m^{x-1}}{x!}\,(x-m)^r\right]$$

بضرب الطرفين في m والاختصار نحصل على

$$m\frac{d\mu_r}{dm} = -r\, m\, \mu_{r-1} + \sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-m}\, m^{x-1}}{x!}\,(x-m)^r (x-m)$$

$$= -r\, m\, \mu_{r-1} + \mu_{r+1}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$\mu_{r+1} = r\, m\, \mu_{r-1} + m \frac{d\mu_r}{dm}$$

٥ , ٦ توزيع ذي الحدين السالب

١ , ٥ , ٦ مـقدمـة

رأينا في تجربة ذي الحدين كيف أن عدد حالات النجاح متغير وعدد المحاولات ثابت، ولكن في بعض التجارب يكون عدد حالات النجاح ثابتًا وعدد المحاولات

متغيرا من أجل الحصول على عدد ثابت من حالات النجاح. يسمى هذا النـوع بتجارب ذي الحــدين السالب (negative binomial). بعبارة أخرى، لتجربة ذي الحدين السالب الخواص التالية:

(أ) يمكن أن تكون نواتج كل محاولة واحدة من اثنتين : نجاح وفشل.

(ب) يبقى احتمال النجاح، ويرمز له بالرمز p، ثابتا لكل المحاولات.

(جـ) المحاولات المتتالية مستقلة.

(د) تجري (أو تستمر) التجربة عددًا متغيرًا من المرات حتى الحصول على عدد معين أو محدد من حالات النجاح.

إذا افترضنا أن المتغير العشوائي X يمثل عدد المحاولات للحصول على عدد k من حالات النجاح في تجربة ذي الحدين السالب. يسمى X بمتغير ذي الحدين السالب، ودالة الاحتمال للمتغير العشوائــي X تسمى دالة احتمال ذي الحدين السالب. عندما يأخذ المتغير العشوائي X في توزيع ذي الحدين السالب القيمة x، فإن توزيع ذي الحدين السالب يعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} \quad , \quad x = k\,,\ k+1\,, \ldots$$

لدالة احتمال ذي الحدين السالب معلمتان هما p, k ، ويرمز لهما بالرمز $b^*(x; k, p)$. أخذ توزيع ذي الحدين السالب التـسـمـيـة مـن حـقـيـقـة أن $\binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$ هو حد في المفكوك $p^k (1-q)^{-k}$ وأن الاحـتمالات عند k, k+1, k+2, ... محاولة هي:

$$p^k\left[1,\ kq,\ \frac{k(k+1)}{2}\,q^2,\ \ldots\right]$$

يسمى توزيع ذي الحدين السالب - أحـيـانًا - بتوزيع باسكـال (Pascal distribution) نسبة للعالم الرياضي الفرنسي بليز باسكال (Blaise Pascal) فــي الفترة (1623-1662). لتوزيع ذي الحدين السالب تطبيقات عديدة في الظـواهـر

البيولوجية أو الحيوية ويظهر كذلك في حالة المعاينة العكسية من مجتمع ذي الحدين.

٦,٥,٢ بناء توزيع ذي الحدين السالب

يمكن بناء الدالة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين السالب بطرق مختلفة. يعتمد أحد هذه الطرق على محاولات برنولي لإيجاد صيغة رياضية تمثل احتمال الحصول على k حالة نجاح في x من المحاولات بشرط أن تتحقق التجربة في المحاولة الأخيرة؛ أي يجب أن تكون حالة نجاح. يمكن الحصول على متتابعة تحتوي على k حالة نجاح في x من المحاولات المستقلة بشرط أن تكون منتهية بحالة نجاح كالتالي:

$$SS \ldots S \qquad FF \ldots FS$$

$x - k$ من المرات $k - 1$ من المرات

ويكون احتمال النجاح في المحاولة x^{th} مسبوقة بعدد $(k-1)$ حالة نجاح و$(x-k)$ حالة فشل هو $p^{k-1} q^{x-k} p = p^k q^{x-k}$ ، وحيث إن الترتيب السابق ترتيب من ترتيبات مختلفة، ولدينا الرغبة في ظهور تلك الحوادث بأي ترتيب، فإن عدد الترتيبات الممكنة لظهور ذلك هو $\binom{x-1}{k-1}$. وتكون الصيغة الرياضية التي تمثل احتمال ظهور حالة النجاح x^{th} في المحاولة x^{th} هي:

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} \ , \quad x = k,\ k+1, \ldots$$

مثال ٦,٥,١

يرمي شخص زوجًا من حجر النرد. ما احتمال حصوله على مجموع 7 للمرة الثانية في الرمية الثامنة؟

الحــل

احتمال حصول الشخص على مجموع 7 في تجربة رمي زهرتي نرد هو $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$ ؛ أي أن احتمال النجاح p يساوي $\frac{1}{6}$ ، أي أن $p = \frac{1}{6}$. وحيث إن عدد حالات النجاح ثابت. يمكن أن نستخدم توزيع ذي الحدين السالب عندما $k = 2$ و $x = 8$ الذي يكون على الصورة التالية:

$$b^*(x; k, p) = b^*\left(8; 2, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \binom{8-1}{2-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{8-2}$$

$$= 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.0651$$

مثال ٢, ٥, ٦

رمى كل من ثلاثة أشخاص قطعة نقود معدنية. اتفق الثلاثة على أن الشخص النشاز أو الشاذ يدفع قيمة مشروب الشاي لهم عند أول زيارة لمقهى الكليــة. إذا ظهر على كل القطع المعدنية صور أو ظهر على كلها كتابة فإنه لابد من إعادة عملية الرمي مرة ثانية، . . . وهكذا. فما احتمال التوصل إلى قرار فيما بينهــم فــي 5 رميات أو أقل؟

الحــل

للتوصل إلى نتيجة الرهان أو القرار في أي محاولة، فإنه يجب أن ينتج عن جميع القطع المعدنية صورتان وكتابة أو كتابتان وصورة. يمكن حساب احتمال هذه الحوادث بتوزيع ذي الحدين كما يلي:

$$P(\text{ظهور صورتين وكتابة}) = P(2H, T) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

$$P(\text{ظهور صورة وكتابتين}) = P(H, 2T) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

ويكون احتمال التوصل إلى القرار هو $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = 0.75$

نحسب احتمال الحصول على الاتفاق أو القرار في 5 رميات أو أقل، وهذا يمكن تحديده بواسطة توزيع ذي الحدين السالب، حيث إن $k = 1, p = 0.75; x \leq 5$. عندئذ

$$P(X \leq 5) = \sum_{x=1}^{5}\binom{x-1}{k-1}(0.75)^k(0.25)^{x-k}, \quad k = 1$$

$$= 0.75 + 0.1875 + 0.0469 + 0.0029$$

$$= 0.9990$$

٣,٥,٦ خواص توزيع ذي الحدين السالب

من الخواص المهمة لتوزيع ذي الحدين السالب مايلي:

(أ) مجموع الاحتمالات يساوي واحدًا.

البرهـان

لإثبات أن مجموع احتمالات توزيع ذي الحدين السالب

$$b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad x = k, \ k+1, \ldots$$

يساوي واحدًا نتبع التالي:

$$\sum b^*(x;k,p)=\sum_{x=k}^{\infty}\binom{x-1}{k-1}p^k q^{x-k}\quad,\quad (x=k\ ,\ k+1\ ,\ ...)$$

نفرض أن $y = x - k$ ويكون مجموع الاحتمالات هو:

$$\sum_{y=0}^{\infty}\binom{y+k-1}{k-1}p^k q^y = p^k\sum_{y=0}^{\infty}\binom{y+k-1}{k-1}q^y\ ,\ (y=0,1,2,...)$$

$$= p^k\left[\binom{k-1}{k-1}q^0+\binom{k}{k-1}q^1+\binom{k+1}{k-1}q^2+...\right]$$

$$= p^k\left[1+kq+\frac{k(k+1)}{2!}q^2+...\right]$$

$$= p^k(1-q)^{-k}$$

$$= p^k\,.\,p^{-k} = 1$$

(ب) متوسط توزيع ذي الحدين السالب أقل من تباينه.

تعطى الدالة المولدة للعزوم حول الصفر في توزيع ذي الحدين السالب كالتالي:

$$M(t)=E(e^{tX}) = p^k\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+k-1}{k-1}q^x e^{tX}$$

$$= p^k\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+k-1}{k-1}(qe^t)^x$$

$$= p^k(1-qe^t)^{-k}$$

الآن باستخدام الدالة المولدة للعزوم نحصل على المتوسط التالي:

$$E(X) = \left[\frac{d\,M(t)}{dt}\right]_{t=0} = \left[p^k.k.q.e^t\left(1 - qe^t\right)^{-k-1}\right]_{t=0}$$

$$= p^k.k.q(1 - q)^{-k-1}$$

$$= k.q.p^k.q^{-k-1} = \frac{kp}{q}$$

وكذلك للحصول على التباين $\sigma^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$ ، نلاحظ أن:

$$E(X^2) = \left[\frac{d^2M(t)}{dt^2}\right]_{t=0}$$

$$= \left[p^k.k.q.e^t(1\text{-}qe^t)^{-k-1} + p^k.k(k+1).q^2.e^{2t}(1\text{-}qe^t)^{-k-2}\right]_{t=0}$$

$$= p^k.k.q(1\text{-}q)^{-k-1} + p^k.k(k+1).q^2(1\text{-}q)^{-k-2}$$

$$= \frac{kq}{p} + \frac{k(k+1).q^2}{p^2}$$

عندئذ يكون التباين

$$\sigma^2 = \frac{kq}{p} + \frac{k(k+1)q^2}{p^2} - \left(\frac{kq}{p}\right)^2$$

$$= \frac{kpq + k^2q^2 + kq^2 - k^2q^2}{p^2}$$

$$= \frac{kq(p+q)}{p^2} = \frac{kq}{p^2}$$

ومن ذلك نلاحظ أن التباين في توزيع ذي الحدين السالب أكبر من المتوسط وذلك لأن:

$\frac{kq}{p} < \frac{kq}{p^2}$ ، أي أن $\frac{1}{p} < \frac{1}{p^2}$ أي إذا كان $p < 1$.

(جـ) يكون توزيع ذي الحدين السالب دائمًا توزيعًا موجب الالتواء.

٦,٦ التوزيع الهندسي

٦,٦,١ مقدمة

عندما تكون التجربة عبارة عن محاولات مستقلة واحتمال النجاح p، وتتكرر المحاولات حتى الحصول على أول حالة نجاح، فإن التجربة تسمى تجربة هندسية. بعبارة أخرى، للتجربة الهندسية (geometric) الخواص التالية:

(أ) يجب أن تكون نواتج كل محاولة واحدة من اثنتين : نجاح، وفشل.

(ب) يبقى احتمال النجاح p ثابتا لكل المحاولات.

(جـ) جميع المحاولات المتتالية مستقلة.

(د) تتكرر التجربة عددًا متغيرًا من المرات حتى يمكن الحصول على أول حالة نجاح.

إذا كان X يمثل عدد المحاولات المتطلبة للحصول على أول حالة نجاح، فإن X يسمى متغيرًا عشوائيًا هندسيًا (geometric random variable) وبدالة احتمال أو توزيع هندسي بمعلمة واحدة p، ويرمز أحيانًا لدالة الكثافة الهندسية بالرمز $g(x;p)$.

أخذ التوزيع الهندسي تسميته من حقيقة أن حدوده المتتالية تشكل متسلسلة هندسية. حيث إن المتغير العشوائي الهندسي يمثل المدة التي يجب انتظارها للحصول على أول نجاح، فيسمى أحيانا المتغير العشوائي لزمن الانتظار (waiting time random variable). يمكن ملاحظة أن التوزيع الهندسي يمثل حالة خاصة من توزيع ذي الحدين السالب عندما تكون $k = 1$.

٢,٦,٦ بناء التوزيع الهندسي

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد المحاولات المطلوبة حتى الحصول على أول حالة نجاح (success) فتكون قيم X هي ...,1,2,3. وحيث إن X = x إذا، وإذا فقط، كانت المحاولات الـ x-1 الأولى فاشلة والمحاولة x ناجحة في متتابعة من المحاولات البرنولية، فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يعطى بالعلاقة:

$$P(X = x) = q^{x-1} p , \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

وهذا يمثل التوزيع الاحتمالي:

(أ) $P(X = x) \quad 0$.

(ب) مجموع الاحتمالات يساوي واحد، أي أن:

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = p + pq + q^2p + q^3p + \ldots$$

$$= p\left(1 + q + q^2 + \ldots\right)$$

$$= p\,(1 - q)^{-1}$$

$$= pp^{-1} = 1$$

مثال ١,٦,٦

إذا كان احتمال تصديق خبر معين هو 0.25 فأوجد احتمال أن:

(أ) الشخص السادس هو أول المصدقين للخبر.

(ب) الشخص الثاني عشر هو رابع المصدقين للخبر.

الحل

نفرض أن X يمثل رقم الشخص السامع للخبر، ويكون رقم الشخص المصدق للخبر هو عبارة عن حالة النجاح.

(أ) حيث إن الشخص السادس هو أول المصدقين للخبر، فإن أول حالة نجاح توجد في المحاولة السادسة. والتوزيع الهندسي عند $x = 6$ و $p = 0.25$ هو:

$$P(X = x) = q^{x-1} p$$

وبالتعويض بقيمتي p, x نحصل على

$$P(X = 6) = (0.75)^5 (0.25)$$

(ب) حيث إن الشخص الثاني عشر يسمع الخبر وسيكون رابع المصدقين له، وهذا يعني أن حالة النجاح الرابعة توجد في المحاولة رقم 12، أي أن توزيع ذي الحدين السالب عند $p = 0.25$, $k = 4$, $x = 12$ هو المطلوب.

في هذه الحالة نكتب:

$$b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$$

بالتعويض بقيم p, k, x نحصل على

$$b^*(12; 4, 0.25) = \binom{12-1}{4-1} (0.25)^4 (0.75)^{12-4}$$

$$= \binom{11}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

$$= \frac{165 \cdot 6561}{256 \cdot 65536} = 0.045$$

٣,٦,٦ المتوسط والتباين للتوزيع الهندسي

يعطى المتوسط والتباين للتوزيع الهندسي بالعلاقتين:

$$\mu = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

لإثبات ذلك افرض أن للمتغير العشوائي X توزيعًا هندسيًا بدالة احتمال $g(x; p) = p\, q^{x-1}$. من تعريف التوقع الرياضي ودالة توزيع الاحتمال الهندسية

يكون الوسط هو:

$$\mu = E(X) = \sum x\, g(x;p) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, q^{x-1}\, p \ , \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= p + 2qp + 3q^2p + 4q^4p + \ldots$$

$$= p\left(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots\right)$$

$$= p\,(1-q)^{-2} = p\,p^{-2} = \frac{1}{p}$$

وكذلك يمكن الحصول على التباين σ^2 باستخدام العلاقة

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

نجد أولا القيمة المتوقعة للمتغير X^2 كمايلي:

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2\, q^{x-1}\, p$$

$$= p + 2^2qp + 3^2q^2p + 4^2q^3p + \ldots$$

$$= p\left(1 + 4q + 9q^2 + 16q^3 + \ldots\right)$$

$$= p\left[\left(1 + 3q + 6q^2 + 10q^3 + \ldots\right) + \left(q + 3q^2 + 6q^3 + \ldots\right)\right]$$

$$= p\left[(1-q)^{-3} + q(1-q)^{-3}\right]$$

$$= \frac{1}{p^2} + \frac{q}{p^2}$$

ومن ذلك يكون التباين للتوزيع الهندسي هو:

$$\sigma^2 = \frac{1}{p^2} + \frac{q}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}$$

٤ , ٦ , ٦ الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للتوزيع الهندسي

يمكن الحصول على الدالة المولدة للعزوم (mgf) حول الصفر للتوزيع الهندسي كما يلي:

من تعريف الدالة المولدة للعزوم، وتعريف التوقع الرياضي للتوزيع الهندسي نكتب:

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tX} q^{x-1} p = pe^t \sum_{x=1}^{\infty} (e^t q)^{x-1} \\ &= pe^t \left[1 + qe^t + (qe^t)^2 + \ldots\right] \\ &= pe^t (1 - qe^t)^{-1} \\ &= \frac{pe^t}{1 - qe^t} \quad , \quad qe^t < 1 \end{aligned}$$

لاشتقاق الدالة المولدة للعزوم نكتبها على الصورة:

$$M(t) = \frac{p}{e^{-t} - q} = p(e^{-t} - q)^{-1}$$

تكون المشتقة الأولى للدالة، $M'(t)$ ، هي:

$$M'(t) = pe^{-1}(e^{-t} - q)^{-2}$$

والمشتقة الثانية، $M''(t)$، هي:

$$M''(t) = 2p\,e^{-2t}\left(e^{-t} - q\right)^{-3} - pe^{-t}\left(e^{-t} - q\right)^{-2}$$

ومن ذلك يمكن الحصول على:

$$E(X) = p\,(1 - q)^{-2} = pp^{-2} = \frac{1}{p}$$

$$E(X^2) = 2p\,(1 - q)^{-3} - p(1 - q)^{-2}$$

$$= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

ومنه ينتج أن:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$= \frac{1 - p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

وهذه طريقة أخرى لإيجاد المتوسط والتباين للتوزيع الهندسي؛ وهي طريقة الدالة المولدة للعزوم.

٦,٧ التوزيع متعدد الحدود (كثير الحدود)

٦,٧,١ مقدمة

تصبح تجربة ذي الحدين تجربة متعددة الحدود (multinomial) في حالة ما إذا كا هناك أكثر من ناتجين لكل محاولة. فمثلا؛ يمكن تصنيف الأشياء المصنعة كأشياء: ذات جودة جيدة، ومتوسطة الجـودة، وقليلة الجودة. كما يمكن أن تكون نتيجـة

الحادث في الطريق: بدون جروح، أو بجروح متوسطة، أو بجروح مضاعفة، أو بجروح ووفيات. للتجربة متعددة الحدود الخواص التالية:

(أ) يمكن تصنيف نواتج كل محاولة إلى واحدة منKمن الطوائف المتنافية

$$C_1, C_2, ..., C_k$$

(ب) يبقى احتمال الناتج i^{th} هو p_i ثابتا، ولذلك $\sum p_i = 1$.

(جـ) جميع المحاولات المتتالية مستقلة.

(د) تتكرر التجربة لعدد ثابت من المرات وليكن n .

٦,٧,٢ بناء توزيع متعدد الحدود

إذا أجريت تجربة n مرة، فإن واحدًا من الترتيبات، الذي يمكن أن تظهر فيه C_1 عدد x_1 من المرات، C_2 عدد x_2 من المرات، . . . ، C_k عدد x_k من المرات حيث إن $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ ، هو:

$$C_1 \;...\; C_1 \qquad C_2 \;...\; C_2 \quad ... \quad C_k \;...\; C_k$$

x_1 من المرات x_2 من المرات x_k من المرات

واحتمال ظهور ذلك باستخدام قانون الضرب الاحتمالي هو:

$$p_1 \cdots p_1 \qquad p_2 \cdots p_2 \quad \cdots \quad p_k \cdots p_k$$

x_1 من المرات x_2 من المرات x_k من المرات

من الملاحظ أن هذا الترتيب هو أحد الترتيبات المختلفة، ورغبتنا في ظهور حوادث تكون بأي ترتيب، ويكون عدد الترتيبات الممكنة لظهور ذلك هو:

$$\binom{n}{x_1, x_2, ..., x_k} = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \;...\; x_k!}$$

وتكون دالة الاحتمال متعددة الحدود (multinomial density function) هي:

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \ldots x_k!} (p_1)^{x_1} \ldots (p_k)^{x_k}$$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} x_i!} \prod_{i=1}^{k} (p_i)^{x_i}$$

وهذا هو التوزيع الاحتمالي متعدد الحدود أو كثيرها، وأخذ التسمية من حقيقة أن الاحتمالات متناظرة الحدود في مفكوك متعدد (كثير) الحدود $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)^n$

يمكن إثبات أن متوسط مركبات التوزيع متعدد الحدود وتباينها هما:

$$E(X_i) = np_i$$

$$Var(X_i) = np_i q_i$$

عندما تكون $k = 2$ فإن التوزيع متعدد الحدود يصبح توزيعًا خاصًا هو توزيع ذي الحدين، وبذلك يمكن القول أن توزيع ذي الحدين هو حالة خاصة من التوزيع متعدد الحدود (كثير الحدود).

مثال ١ , ٧ , ٦

يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء، و 4 كرات بيضاء، و 3 كرات زرقاء. سحبت عينة مكونة من 6 كرات مع الإحلال؛ أي أن كل كرة تعاد قبل أن تتم عملية السحب التالية. أوجد احتمال أن تكون الكرات المسحوبة هي 3 حمراء، 2 بيضاء وواحدة زرقاء.

الحل

افرض أن X_1 , X_2 , X_3 تمثل الكرات الحمراء، والبيضاء، والزرقاء على التوالي، عندئذ يكون:

$$p_1 = P(X_1 = 5) = \frac{5}{12}$$

$$p_2 = P(X_2 = 4) = \frac{4}{12}$$

$$p_3 = P(X_3 = 3) = \frac{3}{12}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1) = \frac{n!}{x_1! \ldots x_k!} (p_1)^{x_1} \ldots (p_k)^{x_k}$$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} x_i!} \prod_{i=1}^{k} (p_i)^{x_i}$$

بالتعويض بقيم k, n, p_1, p_2, p_3 نحصل على:

$$P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1) = \frac{6!}{3!.2!.1!} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{4}{12}\right)^2 \left(\frac{3}{12}\right)^1 = \frac{625}{5184}$$

الفصل السابع

بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة

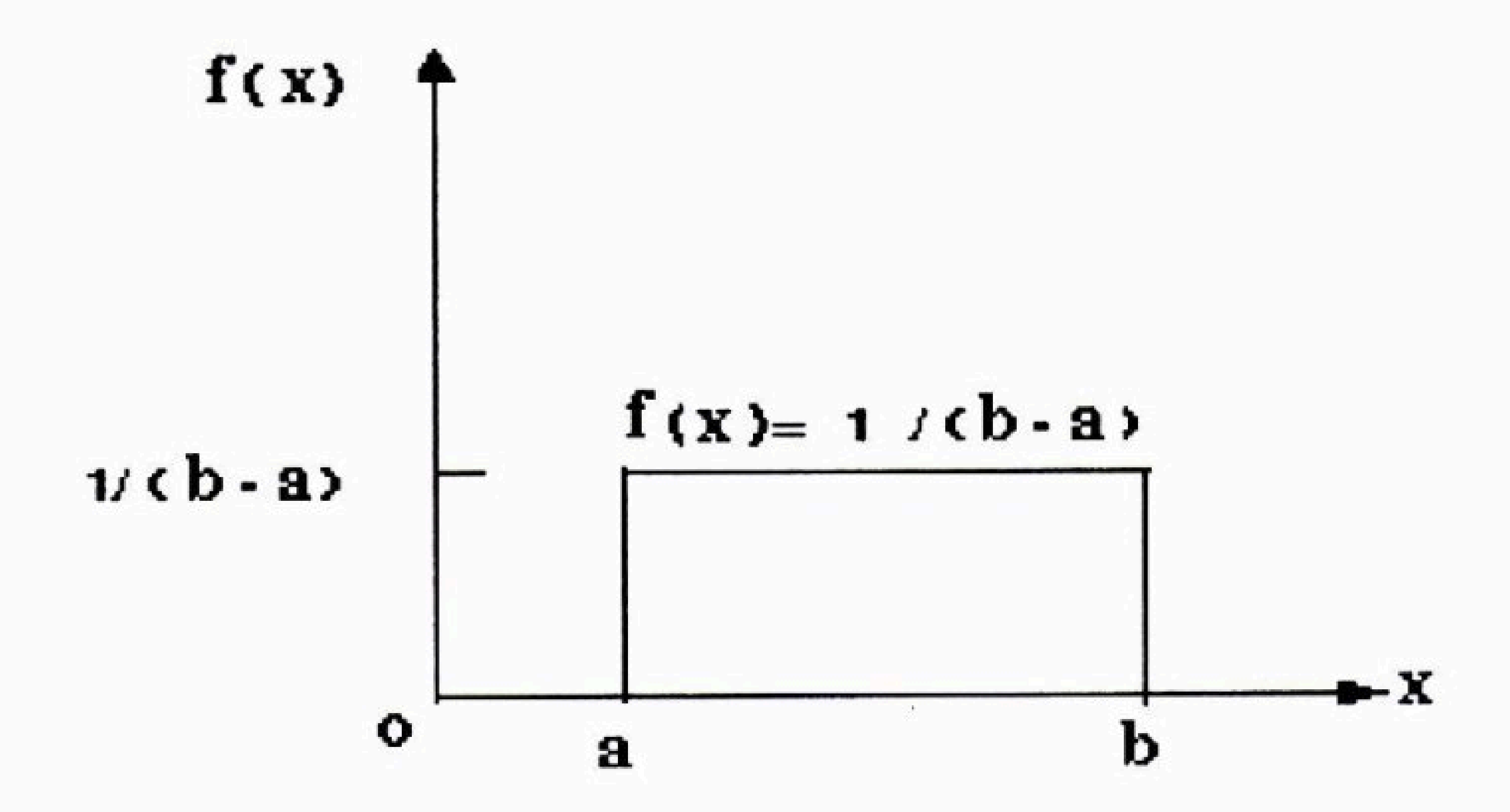
● مقدمة ● التوزيع المنتظم ● التوزيع الأسي ● توزيعا جاما وبيتا ● التوزيع الطبيعي ● تماريـــن

٧,١ مقدمـــــة

سوف نتعرض في هذا الفصل لبعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي يكـثـر استخدامها في كثير من التطبيقات العملية. من هذه التوزيعات الاحتمالية المتصلة، التوزيع الطبيعي وهو من أهم التوزيعات التي يكثر استعمالها في بناء النماذج وفي حل كثر من المسائل والمعضلات في كل من نظرية الاحتمال والاستدلال الرياضي. بالإضافة إلى ذلك ندرس التوزيع المنتظم والتوزيع الأسي وتوزيعي جاما وبيتا. يحتوي هذا الفصل كذلك على تقريب التوزيع الطبيعي لتوزيع بواسون وتوزيـع ذي الحدين.

٧,٢ التوزيع المنتظم (المستطيل)

يقال إن دالة الكثافة للمتغير العشوائي المتصل X منتظمة عندما يكون بين نقاط النهاية، أيُّ فترتين جزئيتين متساويتين في الطول وتحتويان على المتغير X ولهما نفس الاحتمال. للمتغير العشوائـي X توزيع منتظم إذا كانت دالة كثافتـه الاحتمالية هي:



الشكل رقم (١ , ٧). دالة كثافة التوزيع المنتظم.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad a \le x \le b \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أخـذ التـوزيـع المنـتـظم هذه التسمية لثبـوت دالـتـه الاحتماليـة أو انتـظامها عـلى الفـتـرة [a, b] و 0 في غير ذلك. يسمى التوزيع المنتظم أيضاً التوزيع المستطيل (rectangular distribution) وذلك لأن احتماله الكلي هو عبارة عن منطقة مستطيلة الشكل قاعدتهـا تـسـاوي (b - a) وارتفاعها $\frac{1}{b-a}$. دالة التوزيع المنتظمة هي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad a \le x \le b \\ 1 & , \quad x > b \end{cases}$$

١, ٢, ٧ خواص التوزيع المنتظم

إذا كان للمتغير العشوائي X توزيع منتظم على الفترة [a, b] فإن من تعريف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي نحصل على:

$$\mu = E(X)$$

$$= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

ويعني هذا أن التوقع الرياضي $E(X)$ في التوزيع المنتظم هو مركز الفترة [a, b] أو متوسط حدود نفس الفترة، وكذلك يمكن إيجاد $E(X^2)$ كما يلي:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

وحيث إن التباين يعطى بالعلاقة

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

فإن التباين للتوزيع المنتظم هو:

$$Var(X) = \frac{a^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

من تعريف الدالة المولدة للعزوم نحصل على الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المنتظم كما يلي:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_a^b e^{tX} \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

كحالة خاصة، إذا وضعنا $a = 0, b = 1$ $\left(\left[a, b\right] = \left[0, 1\right]\right)$ فقد نحصل على متغير عشوائي ذي توزيع منتظم في الفترة $[0, 1]$ ويكون عزمه الرائي حول الصفر (نقطة الأصل) هو:

$$\mu_r^{\prime} = \int_0^1 x^r \, dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^1 = \frac{1}{r+1}$$

٧,٣ التوزيع الأسي

يقال إن للمتغير العشوائي X توزيعًا أسيًا (exponential) ذا معلمة λ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث إن $\lambda > 0$.

يمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الأسي أيضًا على الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

تعطى دالة التوزيع لمتغير عشوائي أسي كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda x}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

أي أنه يمكن كتابة F(x) على الصورة التالية:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} , & x > 0 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

كما يمكن الحصول على الاحتمال التالي:

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 1 - P(X \leq x) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \\ &= 1 - 1 + e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

٧,٣,١ خواص التوزيع الأسي

من خواص التوزيع الأسي ذي معلمة λ مايلي:

(أ) المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحدًا؛ أي أن المساحة هي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 1$$

وهذا يعني أن f(x) دالة كثافة احتمال، وهو شرط أساسي لأي دالة كثافة احتمال.

(ب) يمكن إيجاد المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع الأسي كما يلي:

من تعريف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي نحصل على:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

باستخدام قانون التكامل بالتجزيء $\int udv = uv - \int vdu$ وبفرض أن $u = x$ ، $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$ فإن $du = dx$ ، $v = -e^{-\lambda x}$.

وبذلك يكون:

$$\int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 + \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

أي أن المتوسط للتوزيع الأسي هو $E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda}$

وكذلك يمكننا إيجاد $E(X^2)$ كما يلي:

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \left[-x^2 e^{-lx}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 + \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

ومن علاقة التباين

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

نحصل على تباين التوزيع الأسي كما يلي:

$$Var(X) = \sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

أي أن تباين التوزيع الأسي هو $\frac{1}{\lambda^2}$، ومنه يكون انحرافه المعياري هو $\sigma = \frac{1}{\lambda}$.

(جـ) التوزيع الأسي شديد الالتواء.

(د) يمكن الحصول على الدالة المولدة للعزوم كما يلي:

$$M(t) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} dx$$

$$= \lambda \left[-\frac{e^{-(\lambda - t)x}}{\lambda - t} \right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - t} \;,\; t < \lambda$$

مثال ١ , ٣ , ٧

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا يمثل مدة مكالمة هاتفية وله توزيع أسي متوسطه 3 دقائق، فما احتمال أن تستغرق المكالمة التليفونية:

(أ) أكثر من 3 دقائق؟

(ب) أكثر من 5 دقائق؟

الحـل

حيث إن المتوسط هو 3، فيكون في التوزيع الأسي $\frac{1}{\lambda} = 3 \;,\; \lambda = \frac{1}{3}$:

(أ) احتمال أن تكون مدة المكالمة التليفونية أكثر من 3 دقائق هو:

$$P(X > 3) = \int_3^\infty \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx = \left[e^{-\frac{x}{3}} \right]_3^\infty$$

$$= e^{-1} = 0.3679$$

(ب) احتمال أن تكون مدة المكالمة التليفونية أكثر من 5 دقائق هو:

$$P(X > 3) = \int_5^{\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx = \left[e^{-\frac{x}{3}}\right]_5^{\infty}$$

$$= e^{-1.7} = 0.1827$$

٤ , ٧ توزيعا جاما وبيتا

أخذ توزيعا جاما وبيتا هذه التسمية من الدوال الخاصة المعروفة بدوال جاما وبيتا، وهذه الدوال تؤدي دورًا مهمًا في نظرية الاحتمالات والرياضيات، ويكون من المستحسن قبل التعرض لتوزيعي جاما وبيتا أن نتعرف على دوال جاما وبيتا (beta and gamma functions) وبعض خواصها الرئيسة أو الأساسية.

١ , ٤ , ٧ دالة جاما

دالة جاما لأي عدد $n > 0$ ، ويرمز لها بالرمز $\Gamma(n)$ ، وتعرف كما يلي:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

نستطيع أن نعطي معنىً أو تفسيرًا آخر لدالة جاما $\Gamma(n)$ وذلك من خلال إثبات صحة العلاقة:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

من التعريف نجد أن:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx, \quad x > 0$$

باستخدام قانون التجزيء للتكامل $\int u\, dv = uv - \int v\, du$ ، وبوضع $u = x^n$ ، $dv = e^{-x} dx$ فإن $du = n x^{n-1}$ ، $v = -e^{-x}$.

ومن ذلك نحصل على:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

$$= \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} n x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$= n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$= n\,\Gamma(n) \quad , \quad \left(\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx\right)$$

ويمكن أيضاً إيجاد التكامــل $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ بواسطة التجزيء مرة أخرى كما يلي:

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \left[-x^{n-1} e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (n-1)\, x^{n-2} e^{-x} dx$$

$$= (n-1)\,\Gamma(n-1)$$

إذا كانت n عدداً صحيحًا موجبًا، فإن تكرار تطبيق العلاقة $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$ يؤدي إلى:

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$$

$$= n(n-1)(n-2) \ldots 3\,.\,2\,.\,\Gamma(1)$$

إذا وضعنا $n = 0$ نجد أن:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left[-\,e^{-x}\right]_0^{\infty}$$

$$= -\,e^{-\infty} + 1 = 1$$

إذن $\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = n!$

إذا وضعنا $x = y^2$ في العلاقة التالية $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$، فإننا نحصل على

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2} dy$$

وهذه صورة أخرى من صور دالة جاما Γ.

إذا وضعنا $n = \frac{1}{2}$ في الصورة $\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2} dy$ نجد أن:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

٢ , ٤ , ٧ دالة بيتا

تعرف دالة بيتا لأي عددين موجبين m, n، ويرمز لها بالرمز $B(m, n)$، كما يلي:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad , \quad m > 0 \, , n > 0$$

عندما تكون $m = n = 1$ ، فإن $B(1, 1) = \int_0^1 x^0 (1-x)^0 dx = 1$.

إذا وضعنا $z = 1 - x$ نجد أن:

$$B(m, n) = -\int_1^0 (1-z)^{m-1} z^{n-1} dz$$

$$= \int_0^1 (1-z)^{m-1} z^{n-1} dz$$

$$= B(n, m)$$

وهذا يعني أنه يمكن تبادل المواقع بالنسبة للثابتين n, m في دالة بيتا؛ أي أن:

$$B(m, n) = B(n, m)$$

وبعبارة أخرى، نقول إن دالة B متماثلة بالنسبة للمعلمتين m و n.

إذا وضعنا $x = \sin^2\theta$، فإنه ينتج من ذلك $dx = 2\sin\theta \cos\theta \; d\theta$ ، وبالتعويض في B(m, n) نحصل على:

$$B(m, n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \;\; \cos^{2n-1}\theta \;\; d\theta$$

وبوضع $m = n = \frac{1}{2}$ نجد أن:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \; = \pi$$

وإذا وضعنا $x = \frac{1}{z + 1}$ ، فإن $dx = \frac{-1}{(1 + z)^2}\, dz$، وبذلك يمكن تــعريف الـــدالة B(m, n) كما يلي:

$$B(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1 + z)^{m+n}}\, dz$$

يمكن ملاحظة أن دالة جاما وبيتا ترتبط إحداهما بالأخرى بالعلاقات الرياضية التالية:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,.\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\;,\;\; m, n > 0$$

بوضع $m = n = \frac{1}{2}$ نحصل على:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,.\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

لكن $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$، وبذلك يكون $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ أو

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\pi}$$

٣ , ٤ , ٧ توزيع جاما

يقال إن للمتغير العشوائي المتصل X توزيع جاما بمعلمة $m > 0$ إذا كانت دالته الاحتمالية هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-x} , & 0 \le x < \infty \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

معلمة متغير جاما m، ويرمز له عادة بالرمز $\gamma(m)$.

٤ , ٤ , ٧ خواص توزيع جاما

نورد فيما يلي عددا من خواص توزيع جاما المهمة.

١- يساوي متوسط وتباين توزيع جاما المعلمة m؛ أي أن:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)$$

$$= \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(m)} x^m e^{-x} dx$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m)} = \frac{m\,\Gamma(m)}{\Gamma(m)} = m$$

وكذلك من علاقة التباين $Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$ نجد أولا

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m)}$$

$$= m(m+1)$$

ومن ذلك نحصل على $Var(X) = \sigma^2 = m(m+1) - m^2 = m$

٢- المساحة تحت منحنى الدالة تساوي واحدًا؛ أي أن الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة احتمال.

٣- الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للمتغير X في توزيع جاما تعطى كالتالي:

$$M(t) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{1}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-x(1-t)} dx$$

نفرض أن $u = x(1-t)$، ومنه $dx = \frac{du}{1-t}$، وبالتعويض في $M(t)$ نحصل على:

$$M(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{1-t}\right)^{m-1} \frac{du}{1-t}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^m} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(m)} u^{m-1} e^{-u} du$$

$$= (1-t)^{-m} \quad , \quad |t| < 1$$

بتفاضل الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ عدد r مرة بالنسبة إلى t، ومن ثم وضع $t = 0$ نجد أن:

$$\mu'_r = m(m+1) \ldots (m+r-1)$$

$$\mu'_1 = m$$

$$\mu'_2 = m(m+1)$$

من ذلك يكون $\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1 = m$

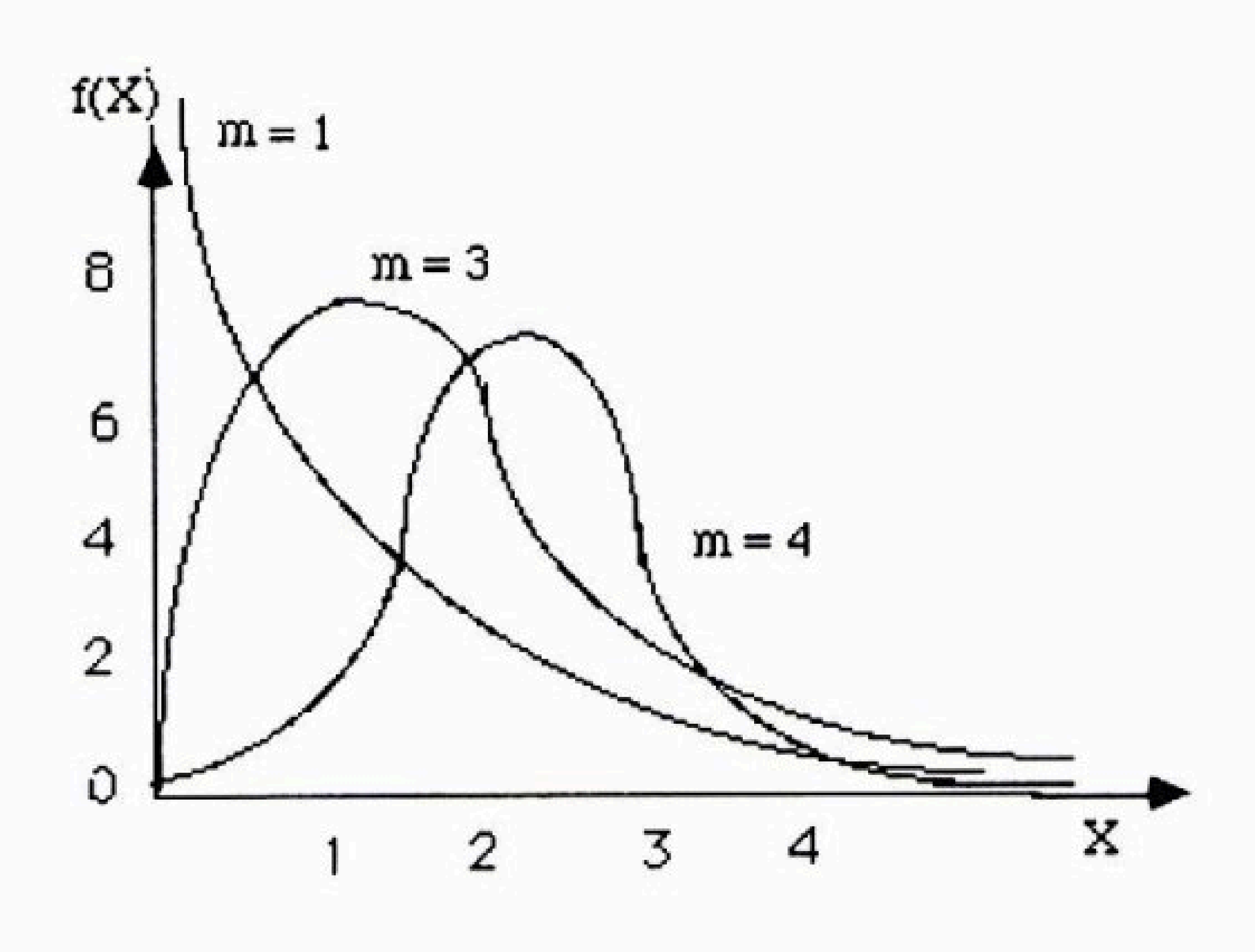
وهكذا بالنسبة لبقية العزوم الأخرى.

٤- الدالة المولدة للتراكمات حول الصفر في توزيع جاما هي:

$$K(t) = \log M(t) = -m \log(1-t)$$

$$= m\left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots\right)$$

$$= m \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r!} (r-1)!$$



الشكل رقم (٢ , ٧).

ويكون التراكم الرائي هو $K_r = m\,(r-1)! = m\,\Gamma(r)$.

٥- إذا كان $m > 1$ فإنه لمنحنى الدالة $f(x)$ في توزيع جاما منوالا عند $x = m - 1$ ، وإذا كان $m > 2$ فإنه يمس المحور X عند نقطة الأصل.

٦- دالة التوزيع $F(x)$ هي:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m)}\, x^{m-1}\, e^{-x}\, dx \ , & x \geq 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases}$$

تسمى أيضا دالة جاما الناقصة أو غير الكاملة (incomplete gamma function) .

وقد قام كارل بيرسون (Karl Pearson) بعمل جدول لقيم هذا التوزيع.

٧- مجموع توزيعين مستقلين في توزيعات جاما بمعلمتين m, n هو توزيع جاما بمعلمة (m+n) .

٧,٤,٥ النوع الأول من توزيع بيتا

إذا كان للمتغير العشوائي المتصـل X توزيع بيتا بمعلمتيـن m, n، وكانت دالته الاحتمالية معطاة بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(m, n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1} \ , \ 0 \le x < 1 \ , \ m, n > 0 \\ 0 \ , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

يـعرف هـــذا التوزيع بالنـــوع الأول مـــن تـــوزيع بيتا أو تـــوزيع بيتا الأول ومتغير بيتا (beta variable) من النوع الأول، ويرمز له بالرمز $\beta_1(m, n)$.

٧,٤,٦ خواص الدالة بيتا من النوع الأول

الخواص الرئيسة لتوزيع بيتا $\beta_1(m, n)$ من النوع الأول هي:

١- المساحة الكلية تحت منحنى الدالة f(x) تساوي واحدًا.

٢- يمكن حساب المتوسط والتباين لهذا التوزيع كما يلي:

$$\mu = E(X) = \int_0^1 \frac{1}{B(m, n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1} x \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{B(m, n)} x^{m} (1-x)^{n-1} dx$$

$$= \frac{B(m+1, n)}{B(m, n)} = \frac{m}{m+n}$$

وباستخدام العلاقة $Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$

وحيث إن:

$$E(X^2) = \int_0^1 \frac{1}{B(m, n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1} x^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{B(m, n)} x^{m+1} (1-x)^{n-1} \, dx$$

$$= \frac{B(m+2, n)}{B(m, n)} = \frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

نحصل على

$$\sigma^2 = \frac{m(m+1)}{(m+n)(m++n-1)} - \left(\frac{m}{m+n}\right)^2 = \frac{mn}{(m+n)^2 \, (m+n-1)}$$

٣- العزم الرائي حول الصفر في توزيع بيتا هو:

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_0^1 x^r \, x^{m-1} \, (1-x)^{n-1} \, dx$$

$$= \frac{B(m+r, n)}{B(m, n)} = \frac{\Gamma(m+r)}{\Gamma(m)} \cdot \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+r+n)}$$

$$= \frac{m(m+1) \, \dots \, (m+r-1)}{(m+n)(m+n+1) \, \dots \, (m+n+r-1)}$$

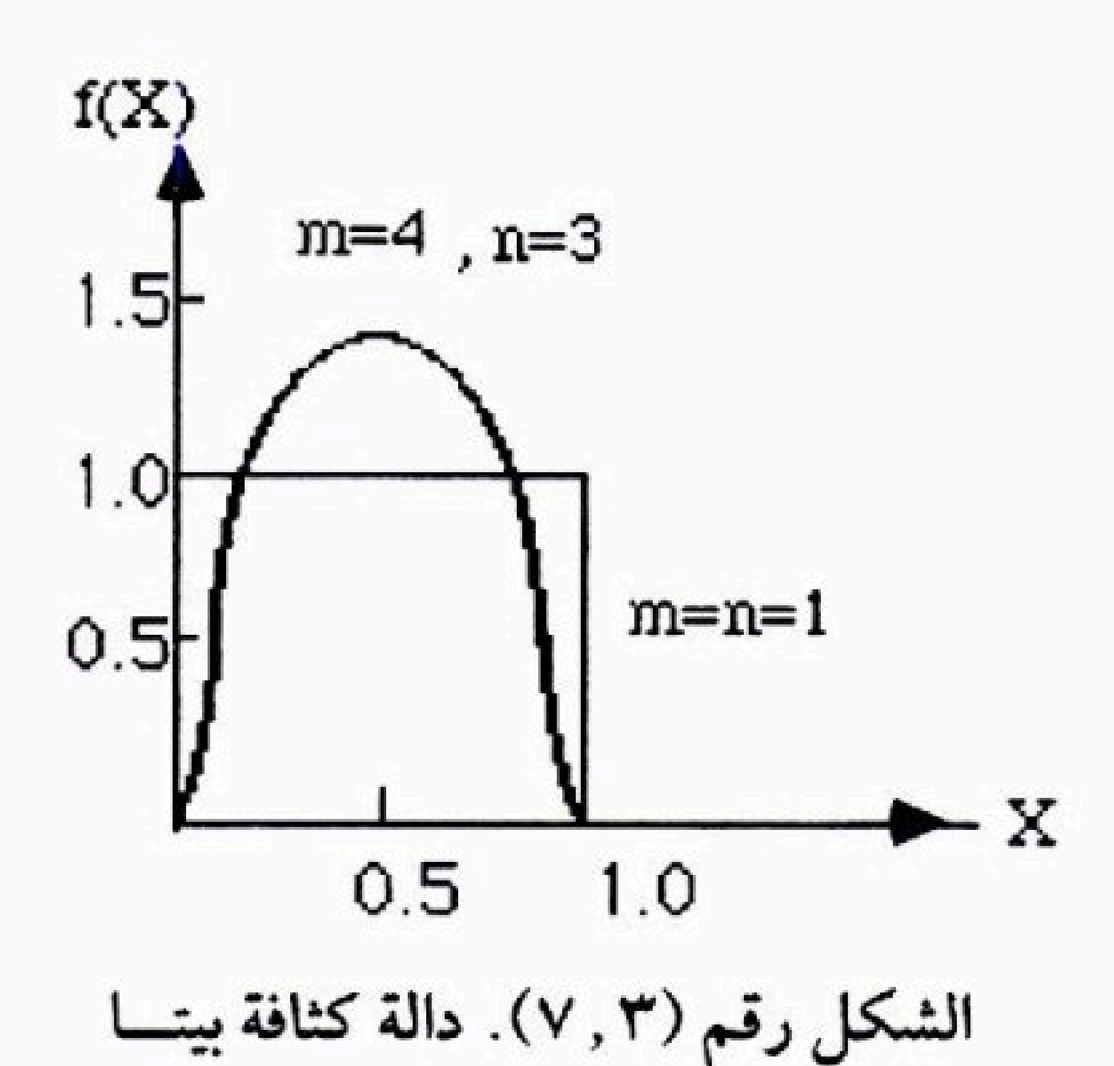
يمكن ملاحظة أنه للدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع صورة رياضية معقدة.

٤- دالة التوزيع $F(x)$ لهذا التوزيع تعطى كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{B(m, n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx & , \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

وتسمى $F(x)$ بدالة بيتا الناقصة (incomplete beta function).

٥- يمكن توضيح شكل توزيع بيتا عندما $n = 3, m = 4$ بالشكل التالي:



الشكل رقم (٧, ٣). دالة كثافة بيتا

٦- إذا كان كل من $m, n > 1$ فإن لتوزيع بيتا من هذا النوع منوالا أو قمة عند $x = \frac{m - 1}{m + n - 2}$، وإذا كانت $m = n = 1$ فإنه يصبح التوزيع توزيعًا منتظمًا (مستطيلا) على الفترة $(0, 1)$. إذا كانت $m > 2$ فإن منحنى الدالة $f(x)$ في هذا التوزيع يمس محور X عند النقطة $x=0$.

٧, ٤, ٧ النوع الثاني من توزيع بيتا

يقال إن للمتغير العشوائي المتصل X توزيع بيتا من النوع الثاني بمعلمتين

m, n إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(m, n)} \cdot \dfrac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} , & 0 \le x < \infty , m, n > 0 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

متغير بيتا من النوع الثاني (Beta variable - second kind) يرمز له بالرمز $\beta_2(m, n)$.

٨ , ٤ , ٧ خواص الدالة بيتا من النوع الثاني

نذكر فيما يلي أهم خواص النوع الثاني من دوال بيتا $\beta_2(m, n)$.

(أ) المساحة الكلية تحت المنحنى $y = f(x)$ تساوي واحدًا؛ أي أن:

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{B(m, n)} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$$

افرض أن $\frac{1}{y} = 1 + x$، ومنه $x = \frac{1 - y}{y}$، $dx = \frac{-dy}{y^2}$ وبالتعويض نحصل على:

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^{1} \frac{1}{B(m, n)}\, y^{n-1} (1-y)^{m-1}\, dy = 1$$

وهو شرط أساسي لأي دالة كثافة احتمالية .

٢- العزوم حول الصفر لهذا التوزيع يمكن، ببساطة، حسابها كما يلي:

$$\mu_r' = E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{B(m, n)} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, x^r\, dx$$

$$= \frac{1}{B(m, n)} \int_0^{1} y^{n-r-1}\, (1-y)^{m+r-1}\, dy$$

بوضع $1 + x = \frac{1}{y}$ نحصل على

$$\mu_r' = E(X^2) = \frac{1}{B(m, n)}\int_0^1 z^{m+r-1} (1-z)^{n+r-1}\, dz \quad , z = 1 - y$$

$$= \frac{B(m+r\, ,\, n - r)}{B(m, n)}$$

$$= \frac{m\ (m-1)\ \dots\ (m+r-1)}{(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-r)}\ ,\ r < n$$

٣- إذا كانت $m > 1$ فإن للتوزيع قمة (منوال) عند $x = \frac{m - 1}{n + 1}$ وإذا كانت $m = 1$ فإن التوزيع الطبيعي يأخذ الشكل J .

٤- يقترب منحنى الدالة $f(x)$ من المحـور X ويمسه عند نقطة الأصل في حالة $m > 2$.

٥- إذا كانت $1 < m < 2$ فإن منحنى الدالة $f(x)$ يمس المحـور X عند نقطة الأصل. إذا كانت $0 < m < 1$ فإن منحنى الدالة يقترب من المحورين X , Y .

٧,٥ التوزيع الطبيعي

يعتبر التوزيع الطبيعي من أكثر التوزيعات استـخـدامًا وتطبيـقًا في كثير من العلوم الأخرى كالإحصاء، والرياضيات، ومجالات الحياة التطبيقية وعلم النمذجة.

٧,٥,١ مقدمــة

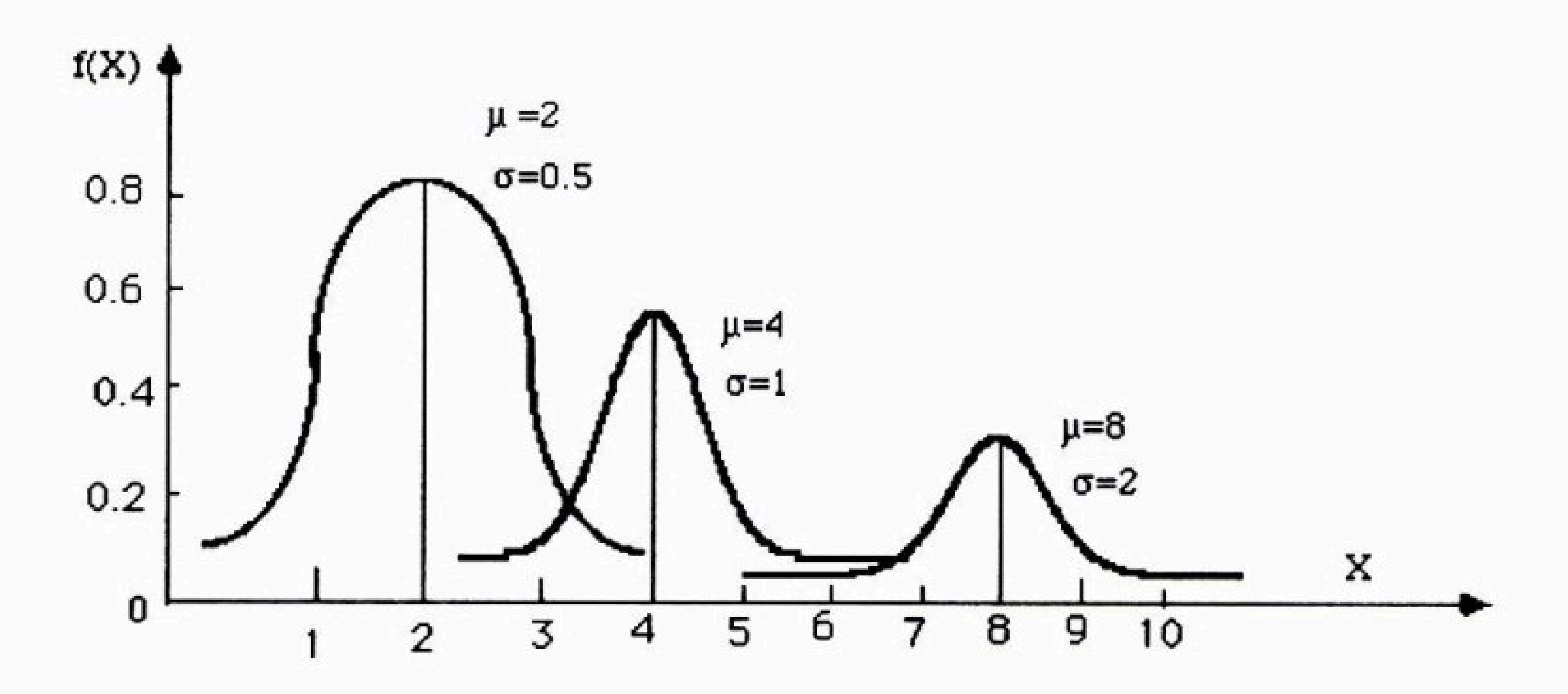
يعتبر التوزيع الطبيعي حجر الزاوية في النظرية الإحصائية الحديثة. لقد عرف التوزيع الطبيعي كنهـاية لتوزيـع ذي الحدين كلما ازداد عدد المحاولات n إلى عدد كبير جـدًا لأي قيمـة ثابتـة p. ويرجـع الفضـل فـي هـذا إلى أبراهام دي موافر (Abraham De Moiever) في الفتــرة (1667-1754). عمل كارل بيـرسون (Karl

(Pearson في الفتـرة (1857-1936) على نـــشر مساهمات دي موافر. كما ساهـم بيـير لابــلاس (Pierre S. Laplace) في الفتــرة (1749-1827) في إيجاد البنيــة الرياضية للتوزيع الطبيعي. يسمى التوزيع الطبيعي أيـضًا باسم توزيع جـاوس أو الجاوسي (Gaussian)، وذلك نسبة للعالم الرياضي الألماني الشهير كارل جـاوس (Karl F. Gaus) الذي عمل على تطوير الصيغة الرياضية لمعادلة التوزيع الطبيـعـي وبنائها. أطلق عليه كارل بيرسون اسم التوزيع الطبيعي عام 1893 ومازال يعرف بهذه التسمية إلى يومنا هذا.

يعرف التوزيع الطبيعي بدالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \quad , \; -\infty < x < \infty \;\; , \sigma > 0$$

حيــث إن μ هو المتــوســط، و σ هو الانحراف المعـيــاري، عــلـمًا أن $e = 2.7183$ ، $\pi = 3.1416$ ثوابت.



الشكل رقم (٤ ، ٧). دالة كثافة للتوزيع الطبيعي.

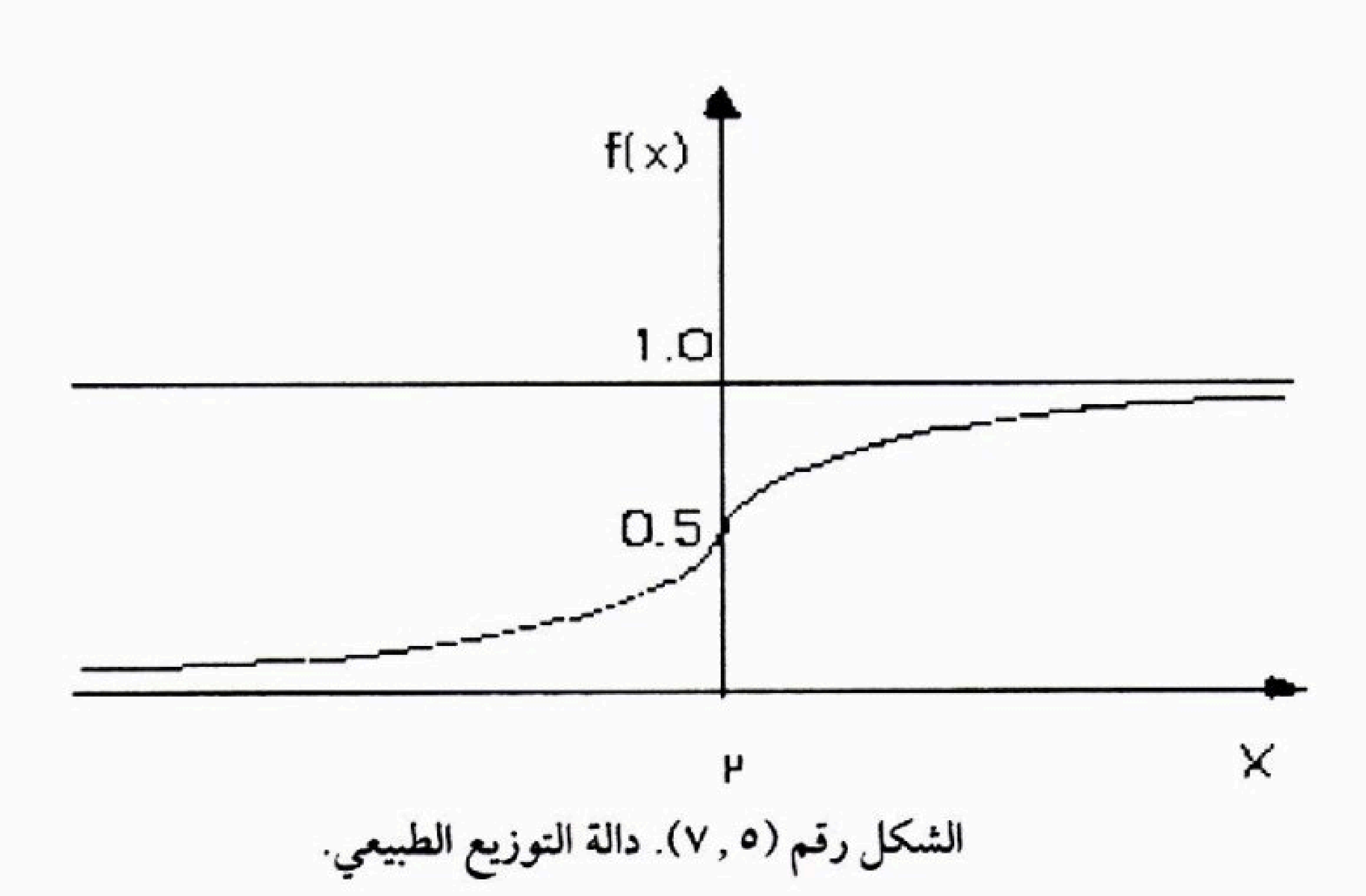
من الواضح أن التوزيع الطبيعي يوصف بمعلمتين μ, σ؛ أي بمتوسطه وانحرافه المعياري. للتوزيع الطبيعي متوسط μ وتباين σ^2، ويرمز له عادة بالرمز $N(\mu, \sigma^2)$ ؛ أي أن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ تعني أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2. ويأخذ المنحنى البياني للتوزيع الطبيعي شكل الجرس؛ لذا يسمى المنحنى الطبيعي (normal curve).

ويحدد موقع المنحنى الطبيعي وشكله بواسطة المعلمتين μ, σ ، حيث إن μ تحدد موقع المنحنى الطبيعي على المحور الأفقي بينما تحدد σ انتشار المنحنى على المحور الأفقي (تشتت التوزيع). ويوضح الشكل التالي تأثير كل من μ, σ في موقع التوزيع ومقدار تشتته عندما تأخذ μ, σ قيمًا مختلفة.

تعطى دالة التوزيع F(x) للتوزيع الطبيعي بالصيغة التالية:

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\left[\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dt$$

ويمكن تمثيلها بيانيًا كما يلي:



الشكل رقم (٥ , ٧). دالة التوزيع الطبيعي.

٧,٥,٢ التوزيع الطبيعي القياسي

سبق أن ذكرنا أن التوزيع الطبيعي يعتمد على قيم المعلـمـتـيـن μ ,σ^2 ، وبإعطاء قيم مختلفة للمعلمتيـن μ, σ ينتج عن ذلك عدد من التوزيعات الطبيعية المختلفة. كما سبق وأن رأينا أن للمتغير العـشـوائـي $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ متوسط صفر وتباينًا يساوي واحدًا. كما يمكن تحويل كل متغير عشـوائـي X له توزيع طبيعي بمعلمتين μ ,σ^2 إلى متغير عشوائي طبيعي جديد بمتوسط صفر وتبايـنًا يساوي واحدًا، وذلك باستخدام العلاقة التالية:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

وتصبح دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z كما يلي:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad , \ -\infty < z < \infty$$

يسمى التوزيع الطبيعي للمتغير Z بمتوسط صفر تباين يساوي واحدًا بالتوزيع الطبيعي القياسي (standard normal distribution)، ويرمز له عادة بالرمـز $N(0, 1)$، وتعطى دالة التوزيع للتوزيع الطبيعي القياسي- ويرمز لها بـالـرمـز $\Phi(z)$ بالصيغة الرياضية:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

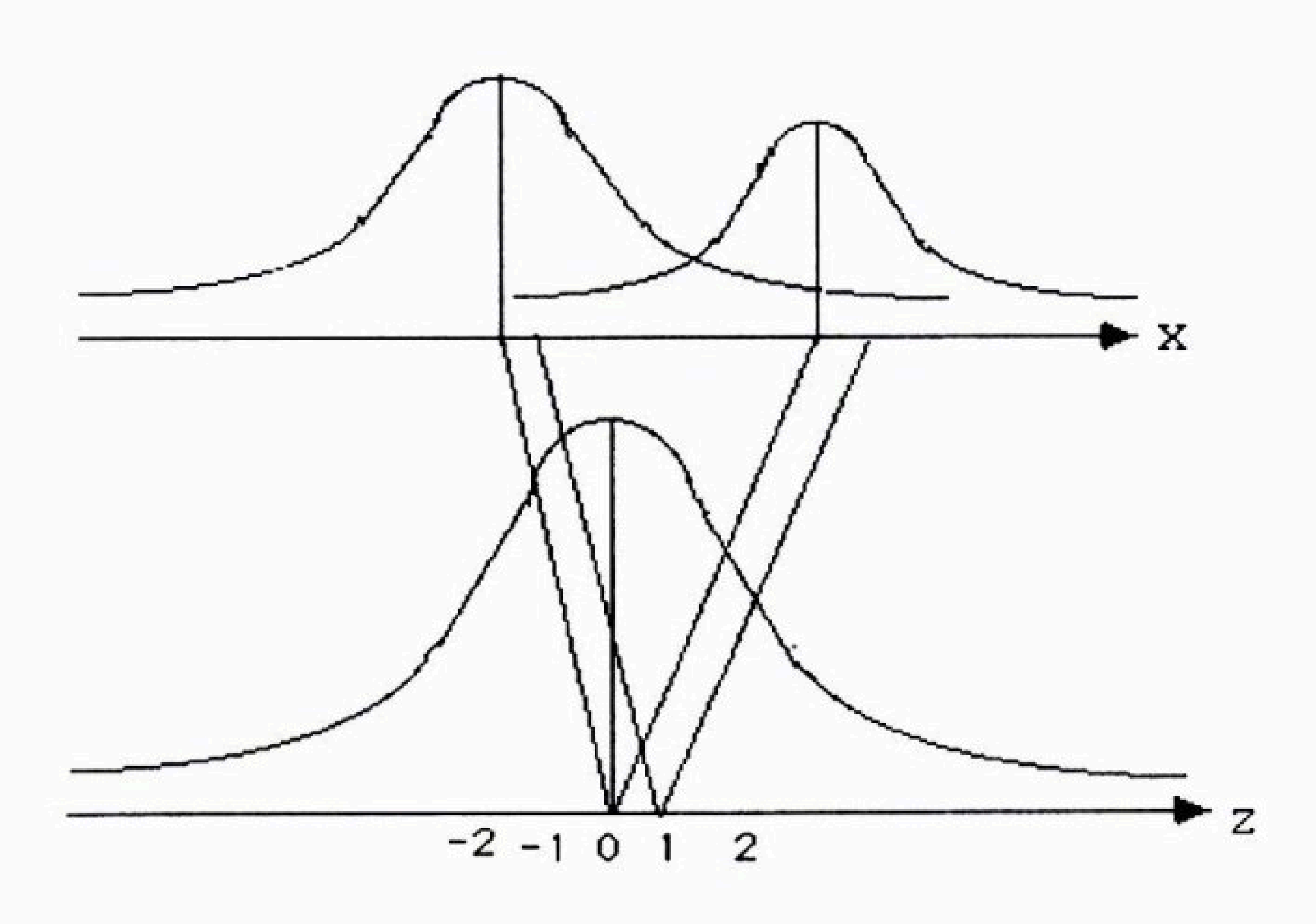
ويمكن الحصول عليها من الجدول (١) لقيم z الموجبة.
قيم $\Phi(z)$ لقيم z السالبة يمكن الحصول عليها من:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

مع ملاحظة أن:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)$$

توضح الأشكال البيانية التالية تحويل التوزيعات الطبيعية إلى توزيع طبيعي قياسي



الشكل رقم (٦ , ٧). دالة كثافة التوزيع الطبيعي.

٣ , ٥ , ٧ خواص التوزيع الطبيعي

نذكر من الخواص الرئيسة للتوزيع الطبيعي ما يلي:

١- تصف f(x) في التوزيع الطبيعي دالة كثافة احتمال؛ أي أن $f(x) \geq 0$، وكذلك المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي تساوي واحدًا.

البرهان

من الواضح أن f(x) تكون دائمًا موجبة، والاحتمال الكلي (المساحة) هو:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}\,dx$$

لنفرض أن $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ، إذن $\sigma\, dz = dx$.

عند التعويض بهذه القيم نحصل على المساحة بالعلاقة

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, \sigma\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \right]$$

الدالة $\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$ هي دالة زوجية للمتغيـر Z ويمكن كتابتها عنـدمـا $w = -z$ على الشكل التالي:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}}\, dw$$

وبذلك تكون المساحة هي:

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

باستخدام التعويض $v = \frac{1}{2} z^2$ ومنه $dv = z\, dz$ فإن المساحة هي:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-v}\, \frac{dv}{\sqrt{2v}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-v}\, v^{-\frac{1}{2}}\, dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

أي أن المساحة الكلية (الاحتمال) تحت المنحنى الطبيعي تساوي الواحد، ومن ذلك يمكن القول أن الدالة $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمال.

٢- لكل من المتوسط، والوسيط والمنوال في التوزيع الطبيعي القيمة نفسها؛ أي أن

μ = المنوال = الوسيط = المتوسط

البرهان

من تعريف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي X نحصل على:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx$$

لكن $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ، ومنه ينتج أن $x = \mu + \sigma z$, $dx = \sigma\, dz$

إذن

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + z\sigma)\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

التكامل الأول $\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$ يمثل μ مضروبًا في المساحة تحت

المنحنى الطبيعي الذي له متوسط 0 وتباين 1 ويكون هذا التكامل مساويا μ.

يمثل التكامل الثانـي $\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$ دالـة فرديـة ويـســاوي

صـفرا. إذن $E(X) = \mu$ ؛ أي أن متوسط التوزيع الطبيعي هو μ.

الوسيط، a ، يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

ويكون

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx = \frac{1}{2}$$

أو

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2}$$

حيث إن $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ، ومن خاصية التماثل للتوزيع الطبيعي:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2}$$

إذن $\frac{a-\mu}{\sigma} = 0$ ومنه $a = \mu$، أي أن وسيط التوزيع الطبيعي هو μ.

مدى التوزيع في حالة وجوده هو القيمة x التي تجعل $f'(x) = 0$ و $f''(x) < 0$.

نريد الآن إيجاد مشتقة الدالة f(x) التي يمكننا الحصول عليها كالتالي:

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{2}{2}\right)$$

يمكن اشتقاق الدالة مرة أخرى فنحصل على:

$$f''(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}\left(\frac{-1}{\sigma^2}\right) + e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

بمساواة $f'(x)$ بالصفر؛ أي أن $f'(x) = 0$ ونجد أن $x = \mu$. وبالتعويض بالقيمة $x = \mu$ في المشتقة الثانية $f''(x)$ نجد أن $f''(x) < 0$؛ أي أن $x = \mu$ هو منوال التوزيع الطبيعي. وبذلك نكون قد أثبتنا أن للمتوسط، والوسيط، والمنوال القيمة نفسها في التوزيع الطبيعي المتماثل. ولذلك يمكن وصف المنحنى الطبيعي بأنه أحادي المنوال ومتماثل.

٣- تباين التوزيع الطبيعي هو σ^2، وانحرافه المتوسط يساوي تقريبًا $\frac{4}{5}$ مثل قيمة انحرافه المعياري.

البرهان

من التعريف

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^2\sigma^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz \quad , \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z\,z\,e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

باستخدام التكامل بالتجزيء وبفرض أن $u = z\ ,\ dv = z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$ فإن:

$$du = dz\ ,\ \ v = -\,e^{-\frac{z^2}{2}}$$

ومن ذلك ينتج أن

$$Var(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

$$= 0 + \sigma^2 = \sigma^2$$

يعطى الانحراف المتوسط للمتغير X عن المتوسط بالعلاقة:

$$M.D. = E\left[|X - \mu|\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu|\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}\,dx$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |z|\,e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\ \ ,\ \ z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} -z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz + \int_{0}^{\infty} z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\right]$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\,e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma\,(0.7979) \cong \frac{4}{5}\,\sigma$$

٤- للمنحنى الطبيعي نقاط انقلاب (inflection points) على مسافات متساوية من المتوسط.

البرهـان

نقطة الانقلاب تعني النقطة التي يتغير عندها تحدب أو تقعر المنحنى، ويمكن الحصول عليها عن طريق حل المعادلة $f''(x) = 0$.

إذا اشتققنا الدالة $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$ نحصل على:

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)\left(\frac{-2}{2}\right)$$

بمساواة هذه المشتقة بالصفر؛ أي $f'(x) = 0$، نجد أن $x = \mu$.

نلاحظ أيضاً أن:

$$f'(x) > 0\,,\;\; x < \mu$$

$$f'(x) < 0\,,\;\; x > \mu$$

أي أن القيمة العظمى للدالة $f(x)$ عند النقطة $x = \mu$ هي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

لإيجاد نقاط الانقلاب نحتاج إلى إيجاد المشتقة الثانية $f''(x)$ وهي:

$$f''(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}\left(\frac{-1}{\sigma^2}\right) + e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}(-1)^2\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}\right]\left[\frac{-1}{\sigma^2} + \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2\right]$$

وبمساواة $f''(x)$ بالصفر؛ أي أن $f''(x) = 0$ ، نحصل على المعادلة:

$$\frac{-1}{\sigma^2} + \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2 = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على أن $x = \mu \pm \sigma$.

عند هاتين النقطتين تكون قيمة الدالة $f(x)$ هي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$ ، وتكون نقطتا الانقلاب للمنحنى الطبيعي هما:

$$\left[\mu+\sigma , \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right] \quad \text{و} \quad \left[\mu-\sigma , \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right]$$

بعبارة أخرى، تقع نقاط الانقلاب على يمين المتوسط ويساره، وعلى مسافة مساوية للانحراف المعياري، وأن المنحنى الطبيعي يأخذ شكل الجرس.

٥- في التوزيع الطبيعي، العزوم الفردية حول المتوسط تساوي صفر والعزوم الزوجية حول المتوسط تعطى بالعلاقة

$$\mu_{2n} = (2n-1)(2n-3) \ \ldots \ 5.3.1.\sigma^{2n}$$

البرهـان

من المعلوم أن العزوم الفردية (المرتبة) حول المتوسط تعطى كالتالي:

$$\mu_{2n+1} = E\left[(x-\mu)^{2n+1}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2n+1} . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx$$

$$= \frac{\sigma^{2n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2n+1} . e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$$

وذلك لأن التكامل هو دالة فردية للمتغير Z

إذن $\mu_3 = 0 = \mu_5 = \dots$

يمكن الحصول على العزوم الزوجية (المرتبة) حول المتوسط كالتالي:

$$\begin{aligned}\mu_{2n} &= E\left[(x-\mu)^{2n}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2n} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx \\ &= \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2n} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \ , \ z = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ &= \frac{2\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} z^{2n} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz\end{aligned}$$

إذا كان $y = \frac{z^2}{2}$، فإن $dy = z\,dz$ ويكون:

$$\begin{aligned}\mu_{2n} &= \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{n+\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} y^{n-\frac{1}{2}} e^{-y} dy \\ &= \frac{2^2 \cdot \sigma^{2n}\, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{2^2 \cdot \sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right) \dots \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi} \\ &= (2n-1)(2n-3) \dots 5.3.1\ \sigma^{2n} \ , \ \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)\end{aligned}$$

بوضع $n = 1, 2$ نحصل على $\mu_2 = \sigma^2 \ , \ \mu_4 = 3\sigma^4$

ومن ذلك يمكننا الحصول على معاملي الالتواء والتفرطح على التوالي:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^3} = 0 \ , \ \mu_3 = 0$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$$

وهذا يعني، في التوزيـع الطبيعي، أن معامل الالتــواء α_3 يساوي صفرًا، ومعامل التفرطح يساوي 3.

٦- إذا كان X متغيرا موزعا توزيعـا طـبـيـعـيّا $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، وكانـت $Y = a + bX$ ، فإن للمتغيـر Y توزيعًا طبيعيا بمتوسـط $a+b\mu$ وتباينا $b^2\sigma^2$؛ أي أن $Y \sim N(a+b\mu, b^2\sigma^2)$.

البرهـان

لإيجاد التوقع الرياضي والتباين للمتغير Y نكتب:

$$E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X) = a + b\mu$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = b^2\sigma^2$$

حيث إن a, b ثوابت.

يمكن أن تكون الدالة $Y = a + bX$ تزايدية أومتزايدة تبعا للثابـت b، فإذا كانت b موجبة، فإن الدالة متزايدة، وإذا كانــت b سالبة، فإن الدالة تناقصيــة أو متناقصة.

إذا كانت Y تتبع التوزيع الطبيعي، فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y تعطى بالصيغة التالية:

$$h(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{\left(\frac{y-a}{b}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]} \left|\frac{1}{b}\right|$$

حيث إن $h(Y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$.

$$= \frac{1}{|b|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(a+b\mu))^2}{2b^2\sigma^2}}$$

وهذه الدالة التي تمثل كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي بالتوزيع $N(a+b\mu, b^2\sigma^2)$. من ذلك يمكن استنتاج أنه إذا كان المتغير X يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$، وكانت $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ فإن Z يتبع التوزيع الطبيعي القياسي؛ أي أن $Z \sim N(0, 1)$.

٧- مجموع متغيرين طبيعيين مستقلين هو متغير طبيعي؛ أي أنه إذا كان:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

وكان المتغيران X_1, X_2 مستقلين، فإن مجموعهما $X_1 + X_2$ هو متغير يتبع التوزيع الطبيعي؛ أي أن:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2\ ,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

٨- 68.26% من المساحة تحت المنحنى الطبيعي تنحصر تقريبًا في الفترة من $\mu - \sigma$ إلى $\mu + \sigma$ و 95.44% من المساحة تحت المنحنى تنحصر داخل الفترة من $\mu - 2\sigma$ إلى $\mu + 2\sigma$، وتنحصر 99.73% من المساحة تحت المنحنى داخل الفترة من $\mu - 3\sigma$ إلى $\mu + 3\sigma$.

وهذه إحدى الخواص المهمة للتوزيع الطبيعي إذ يبنى عليها كثير من الاختبارات المعنوية.

٩- يمكن إيجاد الانحراف الربيعي (quartile deviation)، ويرمز له بالرمز Q، كالتالي:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\mu-Q}^{\mu+Q} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{Q}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{4}, \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

من جداول المساحة قد نجد أن $\frac{Q}{\sigma} = 0.6745$ أو $Q = 0.6745\ \sigma$.

يمكن أيضا إيجاد قيم الربيعيات التالية:

$$Q_1 = \mu - 0.6745\ \sigma$$

$$Q_3 = \mu + 0.6745\ \sigma$$

١٠- يقترب المنحنى الطبيعي إلى المحور الأفقي كلما كانت x تؤول إلى ∞± ($x \longrightarrow \pm\infty$).

٤, ٥, ٧ الدالة المولدة للعزوم والدالة المولدة للتراكمات في التوزيع الطبيعي

إذا كان لدينا متغير عشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي؛ أي أن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، فإن الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للمتغير العشوائي X تعطى بالصيغة الرياضية:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} . e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx$$

إذا كان $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ فإن $dx = \sigma\, dz$ ويكون:

$$M(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\mu+z\sigma)} . e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\, dz$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz\sigma - \frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{z^2 - 2tz\sigma + t^2\sigma^2 - t^2\sigma^2}{2}} dz$$

$$= \frac{e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z - t\sigma)^2} dz$$

$$= e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

يمكن الحصول على الدالة المولدة للعزوم حول الوسط الحسابي في التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$M(t) = E\left[e^{t(x-\mu)}\right] = e^{-\mu t} E\left[e^{tX}\right]$$

وحيث إن:

$$E(e^{tX}) = e^{-\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$= e^{-\mu t\left(\frac{\mu t t t^2 \sigma^2}{2}\right)} = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}t^2\sigma^2}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}t^2\sigma^2\right)^2}{2!} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}t^2\sigma^2\right)^n}{n!}$$

عندئذ نجد أن:

$$\mu_{2n+1} = 0$$

$$\mu_{2n} = \text{معامل } \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{(2n)!}{n!}$$

$$= \frac{\sigma^{2n}}{2n} \cdot \frac{(2n)!}{n!}$$

الدالة المولدة للتراكمات (دالة التراكم) في التوزيع الطبيعي:

إذا كان لدينا المتغير العشـوائـي X، الذي يتبع التوزيع الطبيـعـي؛ أي أن $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ ، فإن الدالة اللوغاريتمية لدالته المولدة للعزوم حول الـصـفـر تسمى الدالة المولدة للتراكمات، ويرمز لها بالرمز $K(t)$، وتعطى بالصيغة:

$$K(t) = \log M(t) = \mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}$$

ومن ذلك يمكننا الحصول على مايلي:

$$K_1 = \mu \ , \ K_2 = \sigma^2 \ , \ \ldots \ , \ K_r = 0 \ , \ r \geq 3$$

وهذا يعني أن جميع التراكمات بعد التراكم الثاني تساوي صفرًا.

مثال ٣, ٥, ٧

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X معطاة كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \exp\left\{\frac{-(x+7)^2}{32}\right\}$$

فأوجد المتوسط، والتباين، والدالة المولدة للعزوم للمتغير X.

الحـل

يمكن كتابة الدالة f(x) على الصورة:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(x-(-7))^2}{2\,(4)^2}\right\}$$

عند مقارنة هذه الدالة بالصيغة العامة للدالة f(x) في التوزيع الطبيعي نجد أن:

$$\mu = -7 \ , \ \sigma^2 = 16$$

ويمكن القول بأن المتغير X يتبع التوزيع الطبيعي بمعلمتين $\mu = -7 \ , \ \sigma^2 = 16$؛ أي أن $X \sim N(-7, 16)$.

بتعويض قيم المتوسط والتباين في الصيغة العامة للدالة المولدة للعزوم حول الصفر:

$$M(t) = e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

نحصل على:

$$M(t) = e^{-7t + \frac{16t^2}{2}}$$

$$= e^{-7t + 8t^2}$$

مثال ٤ , ٥ , ٧

إذا كان $X \sim N(0, 1)$ ؛ أي أن المتغير العشــوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين يساوي 1، فأوجد توزيع كل من $4x$, $\frac{7x}{8} + 5$, $2x - 3$.

الحـل

حيث إنه لدينا $E(X) = 0$, $Var(X) = 1$ والمتغير $Y = 2X - 3$ فإن

$$E(Y) = E(2X - 3) = 2E(X) - 3 = 2(0) - 3 = 3$$

$$Var(Y) = Var(2X - 3) = 2^2\ Var(X) = 4(1) = 4$$

وهذا يعني أن توزيع المتغير $Y = 2X - 3$ يتبع $N(-3, 4)$.

بالمثل يمكن إثبات أن المتغير العشوائي $\frac{7x}{8} + 5$ يتبع التوزيع $X \sim N\left(5, \frac{49}{64}\right)$،
وأن المتغير العشوائي 4X يتبع التوزيع $N(0, 16)$.

مثال ٥ , ٥ , ٧

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي $N(0, 1)$ فما توزيع X^2 ؟

الحـل

المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي؛ أي أن:

$$dF(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\ ,\ -\infty < x < \infty$$

إذا كان $Y = x^2$، فإن $x = \sqrt{y}$ وأن $dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$ ، ويكون توزيع Y هو:

$$dF(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} . \frac{dy}{\sqrt{y}} \quad , \quad 0 \le y < \infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-m} m^{1/2-1} dm \quad , \quad m = \frac{y}{2} \; , \; 0 \le m < \infty$$

وهذا هو متغير جاما بمعلمة تساوي $\frac{1}{2}$.

٧ , ٥ , ٥ إحداثيات التوزيع الطبيعي

الإحداثي هو مقدار الدالة f(x) عند قيمة معينة للمتغير X، ويرمز لإحداثيات التوزيع عادة بالرمز $(x, f(x))$. تؤخذ إحداثيات المنحنى الطبيعي القياسي على مسافات مختلفة من المتوسط، وقد وضعت في جدول. عادة يوضح الجـدول حساب الإحداثيات بالصيغة الرياضية:

$$\phi(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} \; , \; z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

لقيم مختلفة وموجبة من المتغير المعياري Z. نلاحظ أن خاصية التماثل للتوزيع الطبيعي تؤدي إلى أن الإحداثيات لقيم موجبة من Z تساوي الإحداثيات لقيم سالبة من Z.

مثال ٧ , ٥ , ٦

أوجد إحداثيات المنحنى الطبيعي القياسي عند النقاط التالية:

(أ) $Z = 0.64$ ، (ب) $Z = 2.18$ ، (جـ) $Z = 0.08$.

الحـل

(أ) لإيجاد الإحداثي عند النقطة $Z = 0.64$ نستخدم الجدول (٢) فـي العمود Z ، ونبحث عن القيمـة 0.6 ، ومن هذه القيمة نسير أفقيًا إلى العمود 0.04 لنحصل على الإحداثي 0.3251 .

(ب) بالمثل نحصل على الإحداثي عند النقـطـة $Z = 2.18$. نبحث عن القيمة 2.1 في العمود Z ونسير من هذه القيمة أفقيًا إلى العمود 0.08 لنحصل على الإحداثي 0.0371 .

(جـ) من خاصية التماثل نجد أن الإحـداثـي عـنـد $Z = -0.08$ يساوي الإحداثي عند $Z = 0.08$؛ أي الإحداثي هو 0.3977 .

٧,٥,٦ المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي

تساوي المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين أي إحداثيين عـنـد $X = a$ و $X = b$ احتمال وقوع المتغير العشوائي X في الفترة [a, b] ، أي أن:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx$$

والتي تمثل المساحة المظللة في الشكل .

لايمكن إيجاد هذا النوع من التكاملات بالطرق العادية، ولـذا فـقـد تـم حساب قيم المساحة تحت المنحنى الطبيعي، ووضعت في جداول يسهل الرجوع إليها عند الحاجة. فالجدول (3) يغطي المساحات أو الاحتمالات تحت المنحنى الطبيعي القياسي من المتوسـط $Z = 0$ إلى قيمة موجبة معينة Z_0. من خاصيـة التماثل للمنحنى الطبيعي نلاحظ أن:

$$P(z \text{ إلى } 0) = P(-z \text{ إلى } 0)$$

ولذلك لم يشمل الجدول المساحات تحت المنحنى لقيم Z السالبة.

يمكن ملاحظة أن جدول التوزيع الطبيعي القياسي كاف لحساب احتمالات أي توزيع طبيعي لاستخدام جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي يتحتم علينا وضع قيم المتغير العشوائي X في صورة قيم معيارية؛ أي قيم المتغير الطبيعي القياسي Z، ويمكن الحصول على الاحتمالات $\phi(z)$ من جدول التوزيع الطبيعي في نهاية هذا الفصل.

مثال ٧,٥,٧

إذا كان المتغير العشوائي Z له توزيع طبيعي قياسي فأوجد:

(أ) $P(0 \le Z \le 1.2)$ ، (ب) $P(-1.65 \le Z \le 0)$ ،

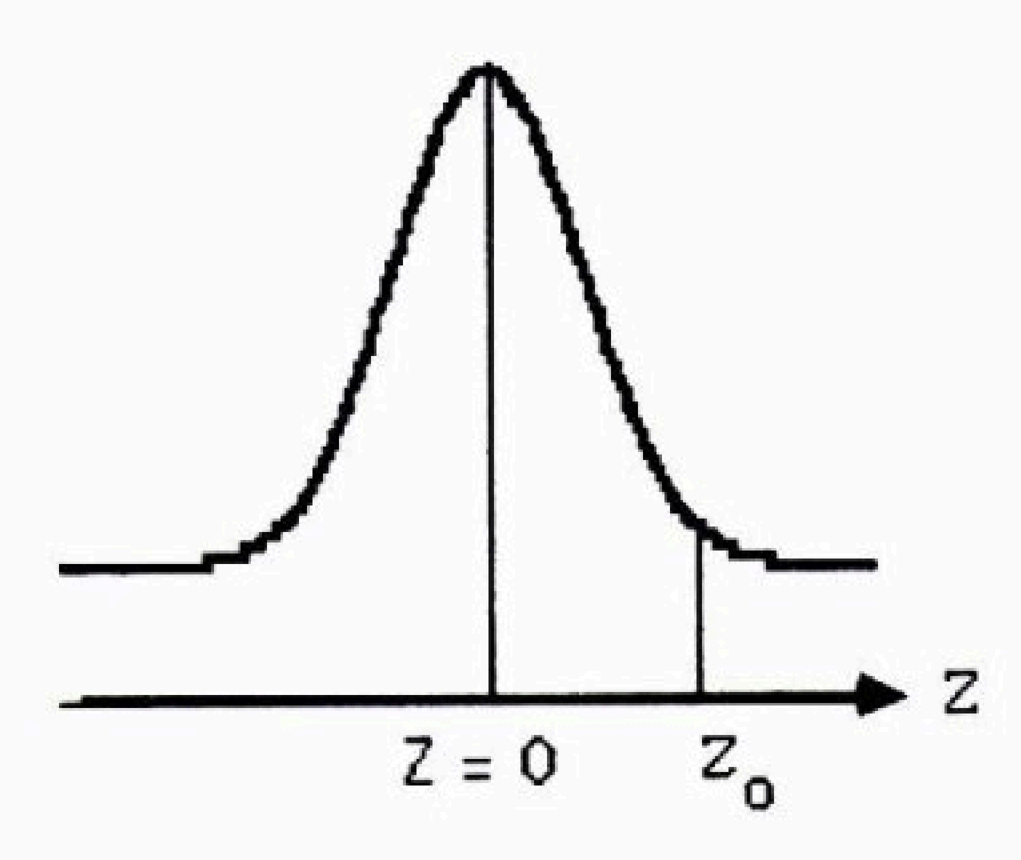
(جـ) $P(0.6 \le Z \le 1.67)$ ، (د) $P(-1.3 \le Z \le 2.18)$ ،

(هـ) $P(-1.96 \le Z \le -0.84)$ ، (و) $P(Z \ge 1.96)$ ،

(ز) $P(Z \le -2.15)$.

الحـل

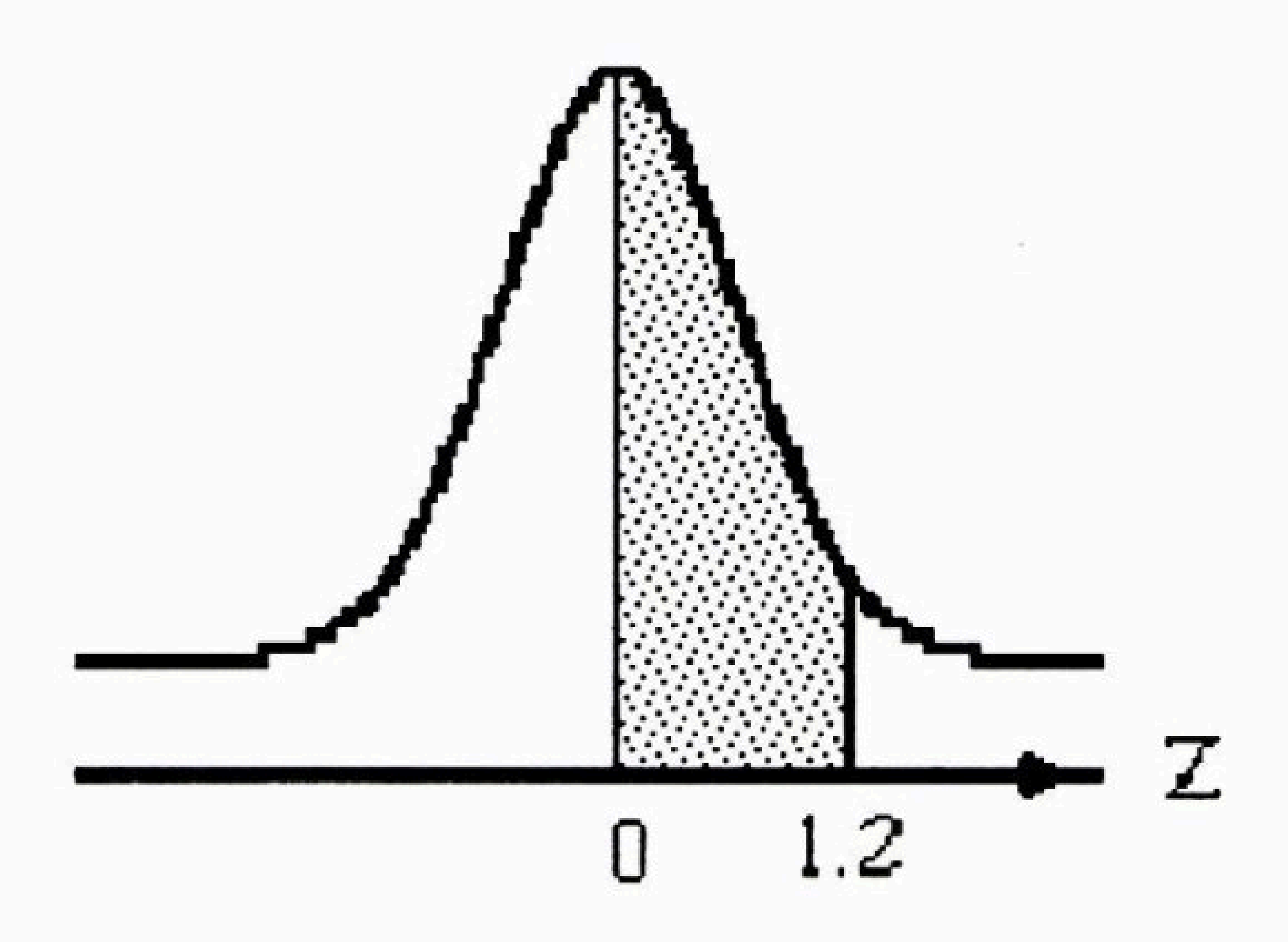
نرسم المنحنى الطبيعي، ونظلل المساحة والاحتمال المطلوب في كل حالة.



الشكل رقم (٧,٧). المســاحة تحت المنحنى الطبيعي.

(أ) لإيجاد $P(0 \le Z \le 1.2)$ نستخدم الجـدول (3) في العمود Z، ونبحث عن القيمة 1.2، ونسير منها خطيًا إلى العمود 0.00 لنحصل على القيمة الاحتمالية المطلوبة 0.3849 ؛ أي أن:

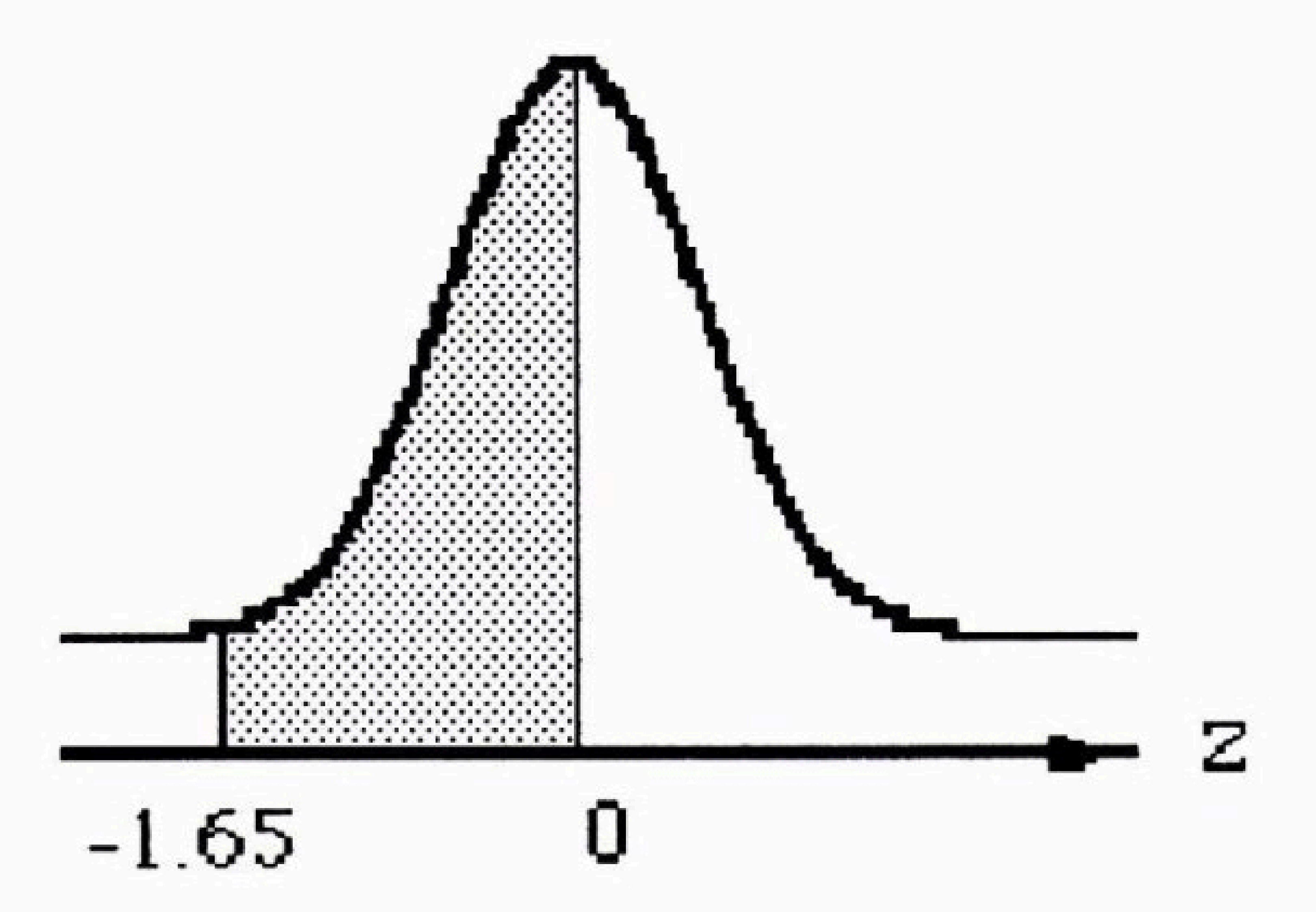
$$P(0 \le Z \le 1.2) = 0.3849$$



الشكل رقم (٨ ,٧). المســاحة تحت المنحنى الطبيعي.

(ب) لأن المنحنى الطبيعي متماثل حول المتوسط، فإن المساحة بين $Z = 0$ وقيمة موجبة للمتغير Z تساوي المساحة بيـن $Z = 0$ وأي قيمة سالبة للمتغير Z، وباستخدام الجدول (3) نحصل على:

$$P(-1.65 \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le 1.65) = 0.4505$$



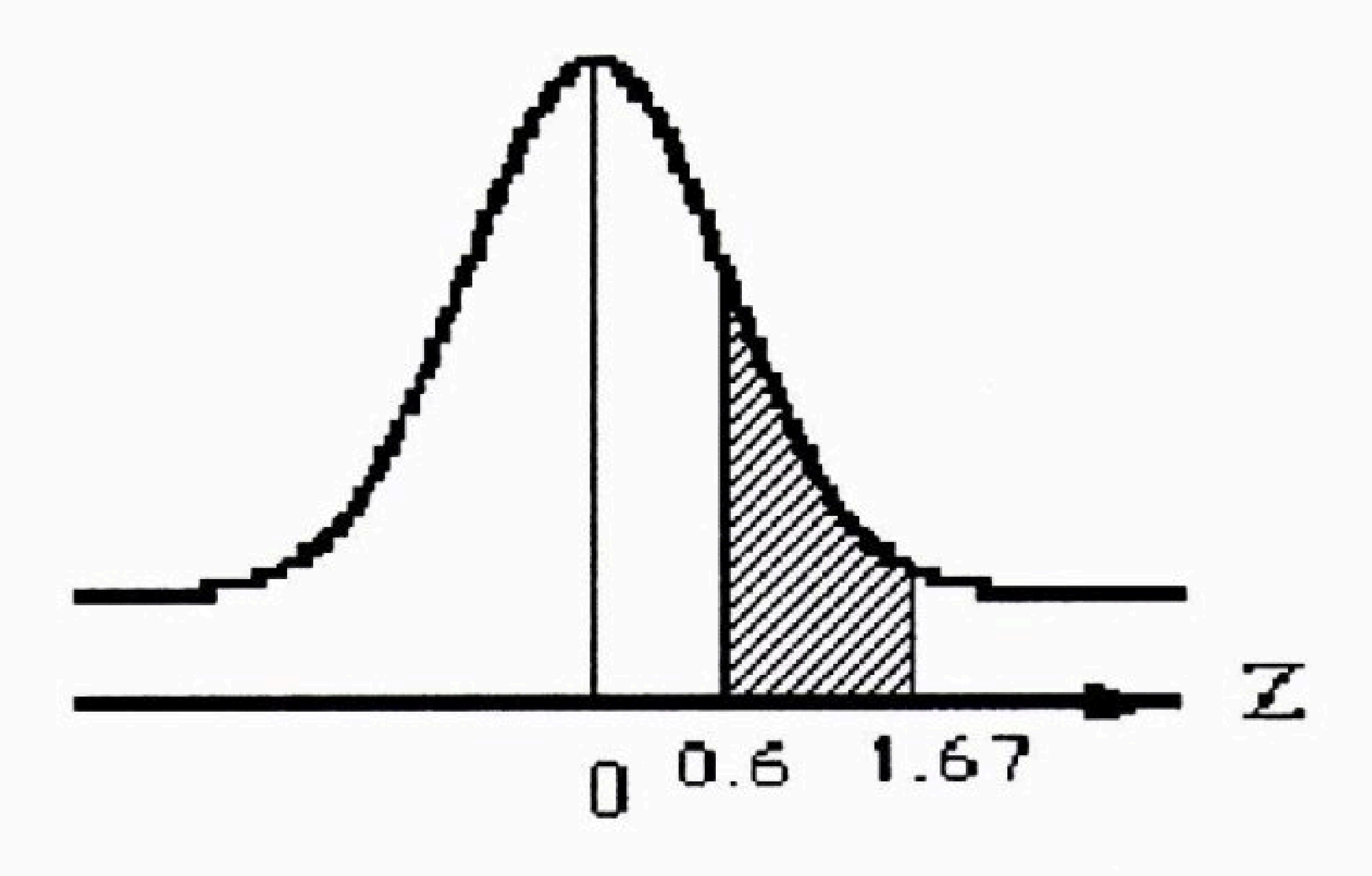
الشكل رقم (٩ , ٧). المســاحة تحت المنحنى الطبيعي.

(جـ) من الجدول رقم (٣) نجد أن:

$$P(0.6 \leq Z \leq 1.67) = P(0 \leq Z \leq 1.67) - P(0 \leq Z \leq 0.6)$$

$$= 0.4525 - 0.2257$$

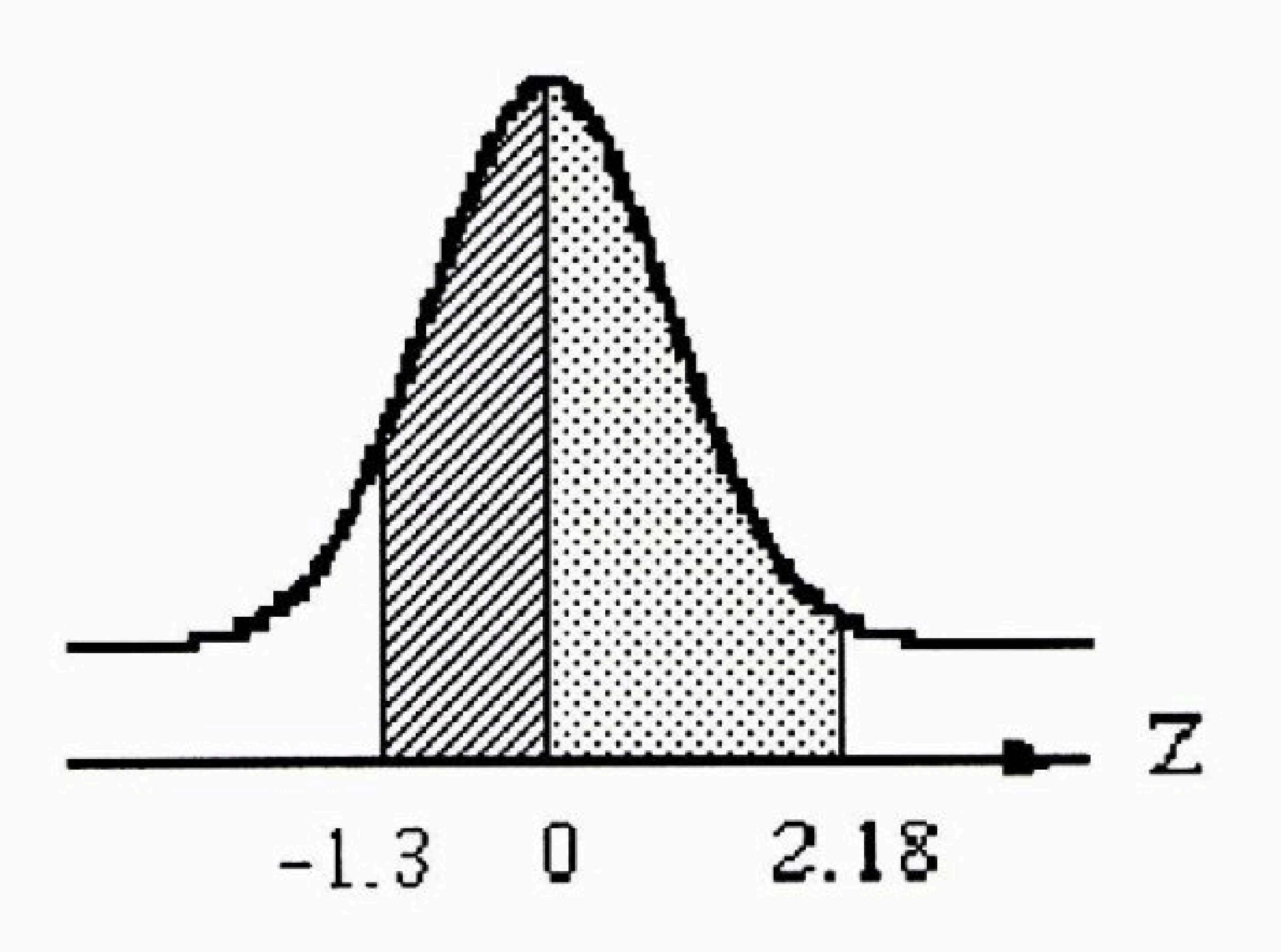
$$= 0.2268$$



الشكل رقم (١٠ , ٧). المساحة تحت المنحنى الطبيعي.

(د) من جدول المساحات رقم (٣) نجد أن:

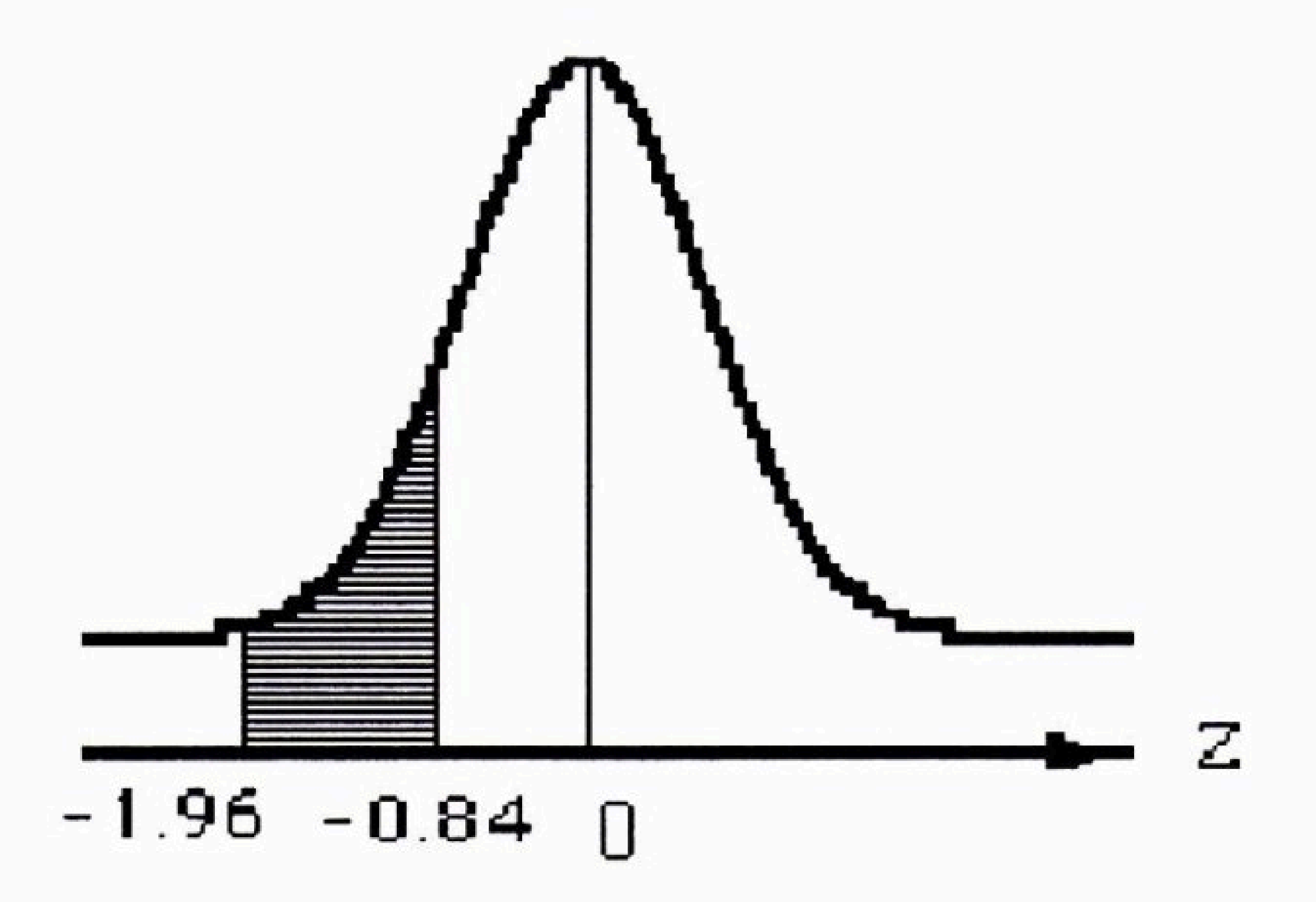
$$P(-1.3 \le Z \le 2.18) = P(-1.3 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2.18)$$
$$= 0.4032 + 0.4854$$
$$= 0.8886$$



الشكل رقم (١١ , ٧). المســاحة تحت المنحنى الطبيعي.

(هـ) من جدول المساحات رقم (٣) نجد أن:

$$P(-1.96 \le Z \le -0.84) = P(-1.96 \le Z \le 0) - P(-0.84 \le Z \le 0)$$
$$= 0.4750 - 0.2995$$
$$= 0.1755$$



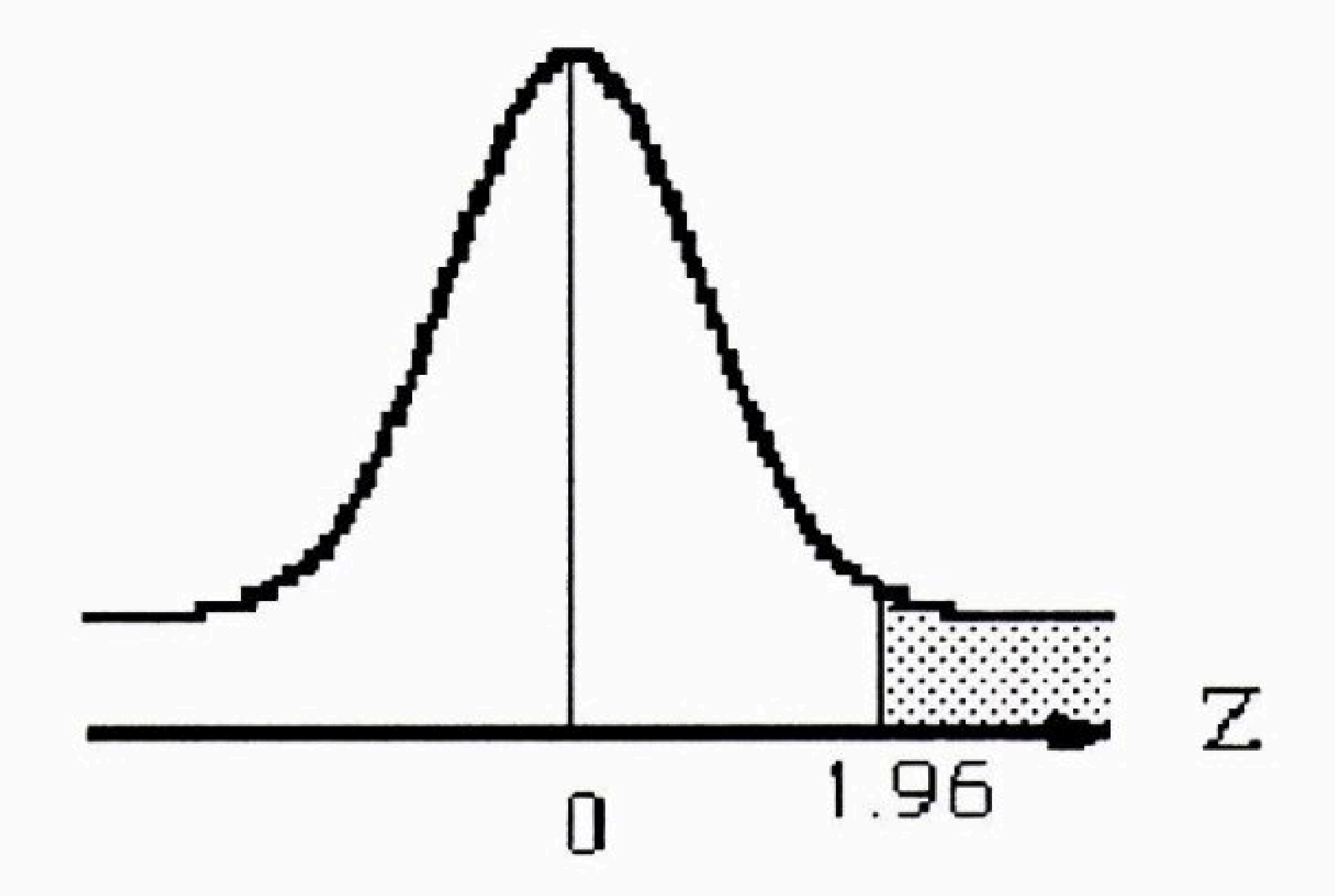
الشكل رقم(١٢ , ٧). المنحنى الطبيعي.

(و) بالطريقة نفسها نحصل على:

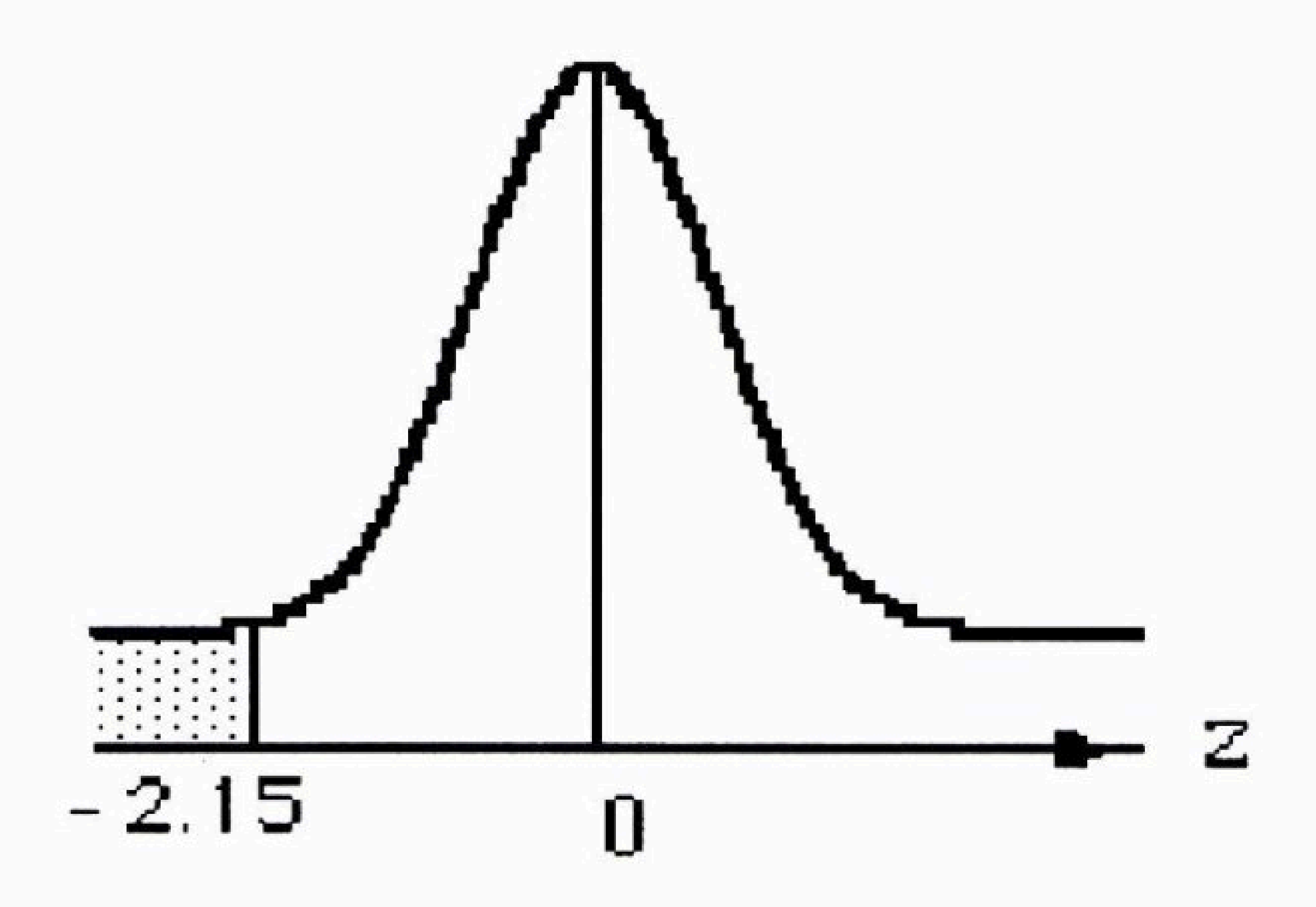
$$P(Z \geq 1.96) = 0.5 - P(0 \leq Z \geq 1.96)$$

$$= 0.5 - 0.4750$$

$$= 0.0250$$



الشكل رقم (١٣ , ٧). المنحنى الطبيعي.



الشكل رقم (٧, ١٤). المنحنى الطبيعي.

(ز) أخيرًا، وبالمثل يمكن الحصول على:

$$\begin{aligned} P(Z \le -2.15) &= 0.5 - P(-2.15 \le Z \le 0) \\ &= 0.5 - 0.4842 \\ &= 0.0158 \end{aligned}$$

مثال ٧, ٥, ٨

إذا كان المتغير العشوائي X موزعًا توزيعًا طبيعيًا بمعلمتين $\mu = 50$, $\sigma^2 = 25$ ، فأوجد احتمال أن يكون:

(أ) المتغير العشوائي بين 0 , 40 , 55 , 100 .

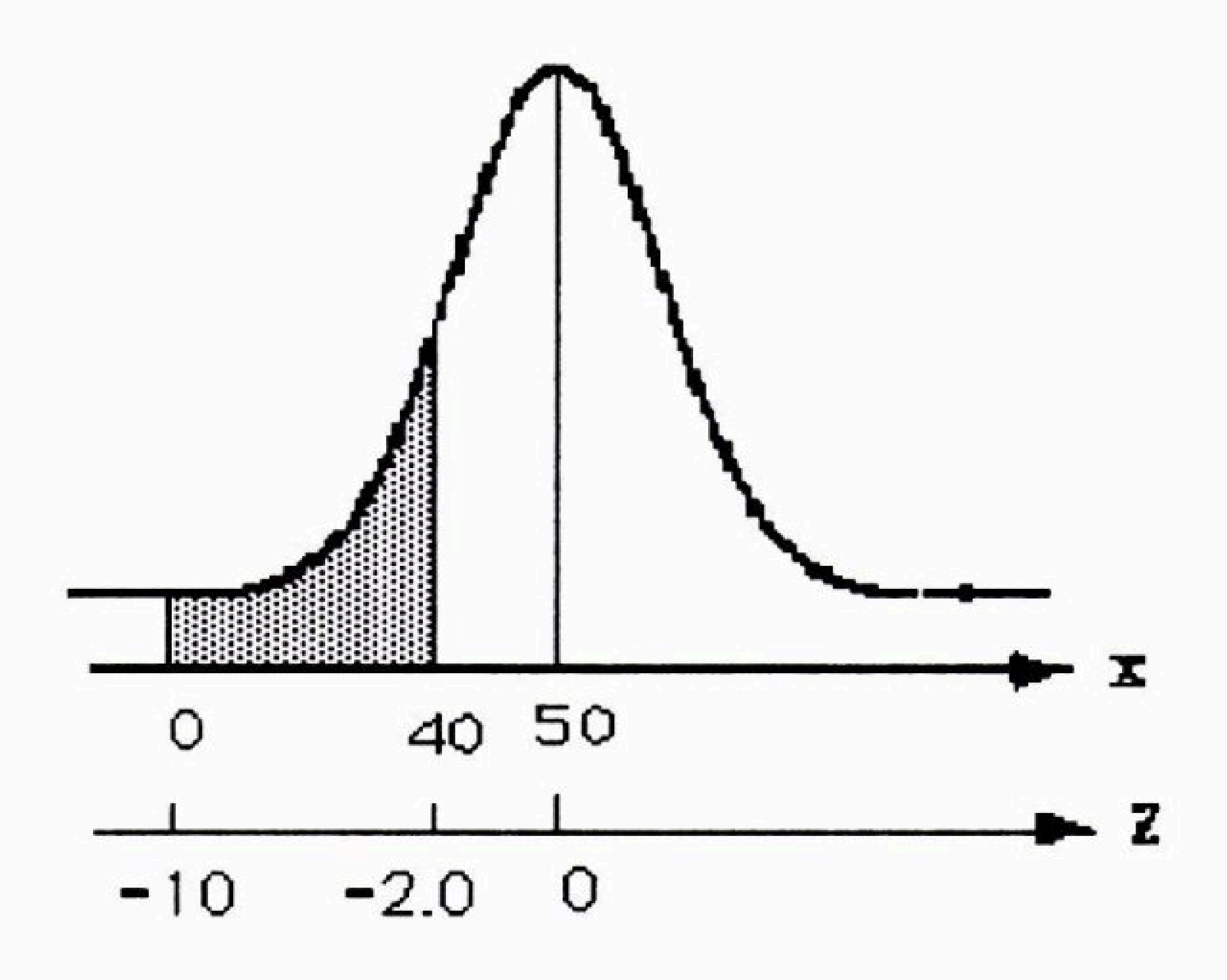
(ب) المتغير العشوائي أكبر من 54 وأصغر من 57.

الحل

حيث إن $\mu = 50$, $\sigma^2 = 25$ ويكون $z = \dfrac{x - 50}{5}$

(أ) عنـد $x = 0$ نحصل علـى $z = \frac{0 - 50}{5} = -10$ ، وعند $x = 40$ نحصل على $z = \frac{40 - 50}{5} = -2$ ، ومن الجدول رقم (٣) نجد أن:

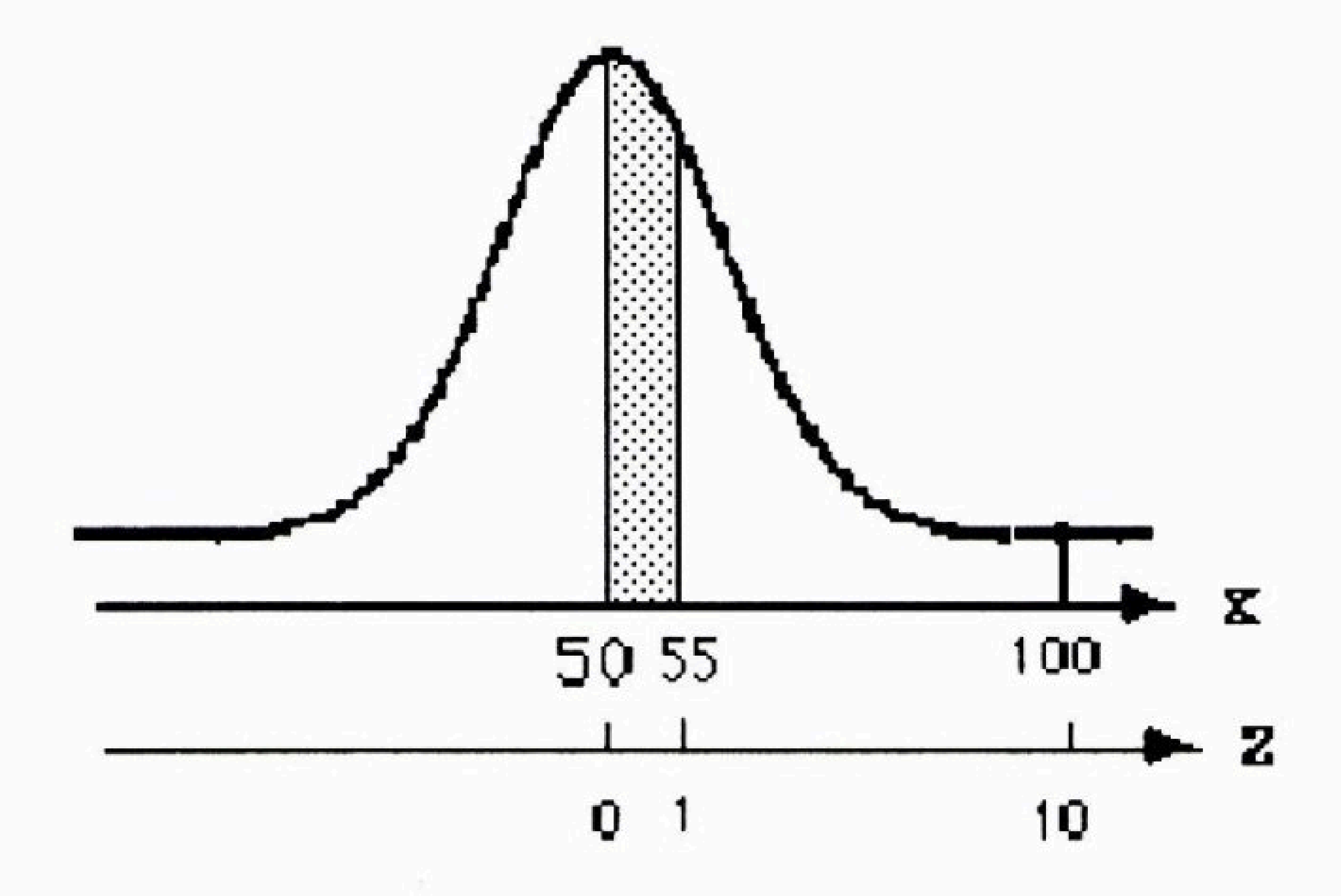
$$P(0 \le X \le 40) = P(-10 \le Z \le -2)$$
$$= P(-10 \le Z \le 0) - P(-2 \le Z \le 0)$$
$$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$



الشكل رقم (١٥ , ٧). المنحنى الطبيعي.

وكذلك عند $x = 55$ نحصل على $z = \frac{55 - 50}{5} = 1$ ، وعند $x = 100$ نحصل على $z = \frac{100 - 50}{5} = 10$ ، ومن الجدول (٣) نحصل على

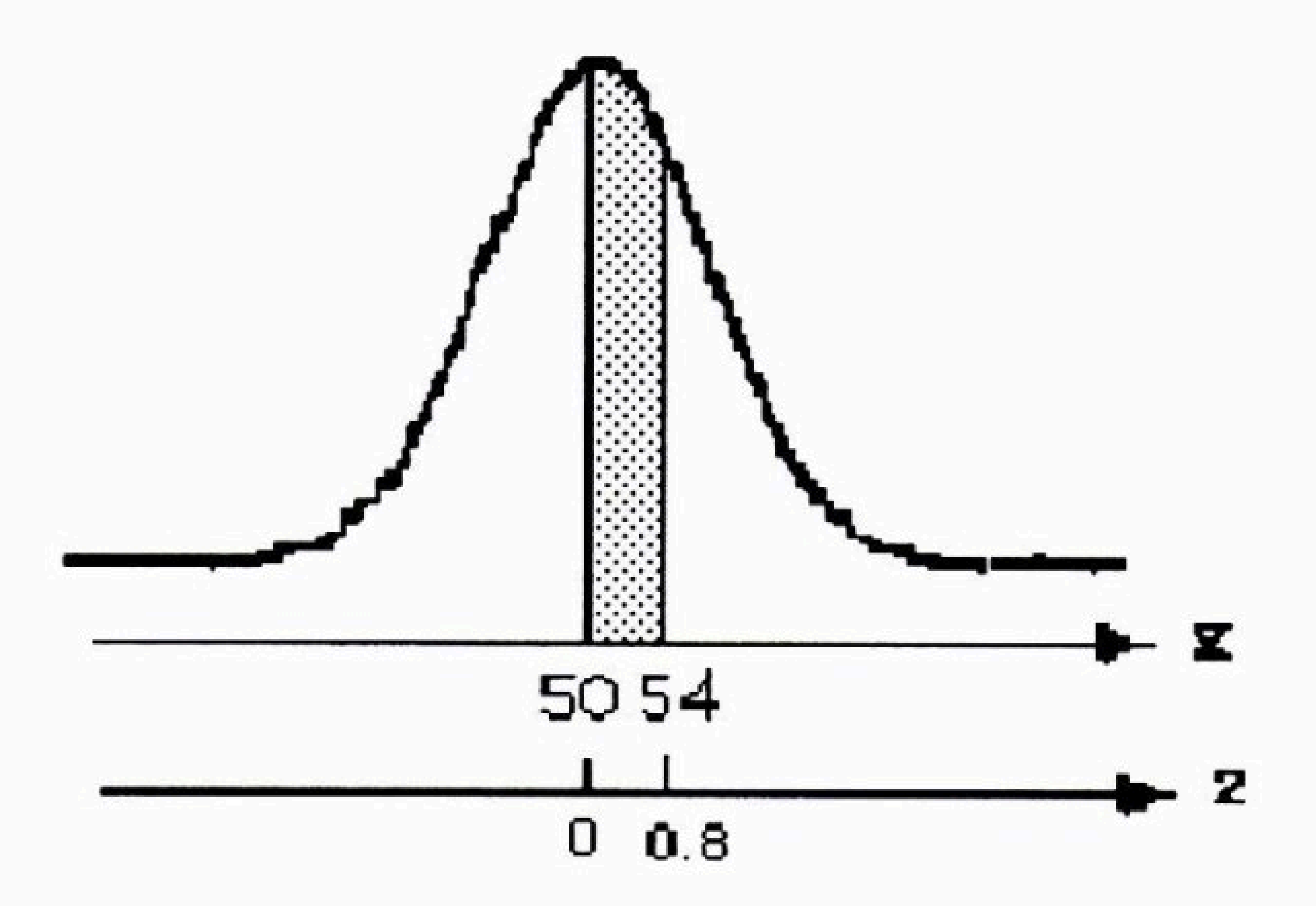
$$P(55 \leq X \leq 100) = P(1 \leq Z \leq 10)$$
$$= P(0 \leq Z \leq 10) - P(0 \leq Z \leq 1)$$
$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$



الشكل رقم (١٦ ,٧). المنحنى الطبيعي.

(ب) عندما $\mu = 50$ و $\sigma = 5$ نحصل على $x = 54$, $z = \frac{54 - 50}{5} = 0.8$ ، ومن الجدول (٣) نجد أن:

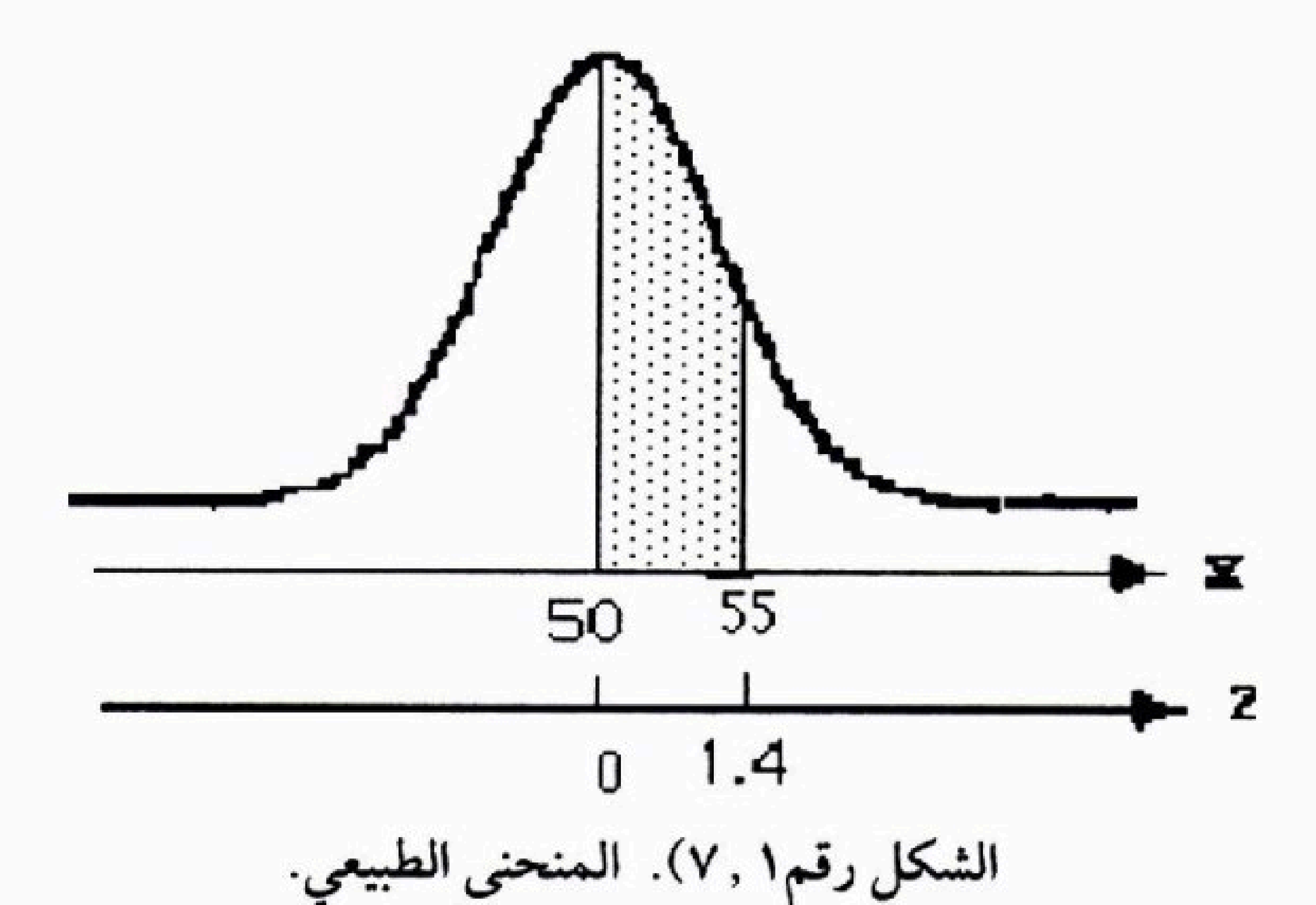
$$P(X \geq 54) = P(Z \geq 0.8)$$
$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.8)$$
$$= 0.5 - 0.2881 = 0.2119$$



الشكل رقم (٧ , ١٧). المنحنى الطبيعي.

عندما تكون $x = 57$ نحصل على $z = \frac{57 - 50}{5} = 1.4$ ، ومن الجدول رقم (٣) نجد أن :

$$P(X < 57) = P(Z < 1.4)$$
$$= 0.5 + P(0 \le Z \le 1.4)$$
$$= 0.5 + 0.4192 = 0.9192$$



الشكل رقم١ , ٧). المنحنى الطبيعي.

مثال ٩ , ٥ , ٧

إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي $M(t) = e^{166t + 200t^2}$ ، فأوجد:

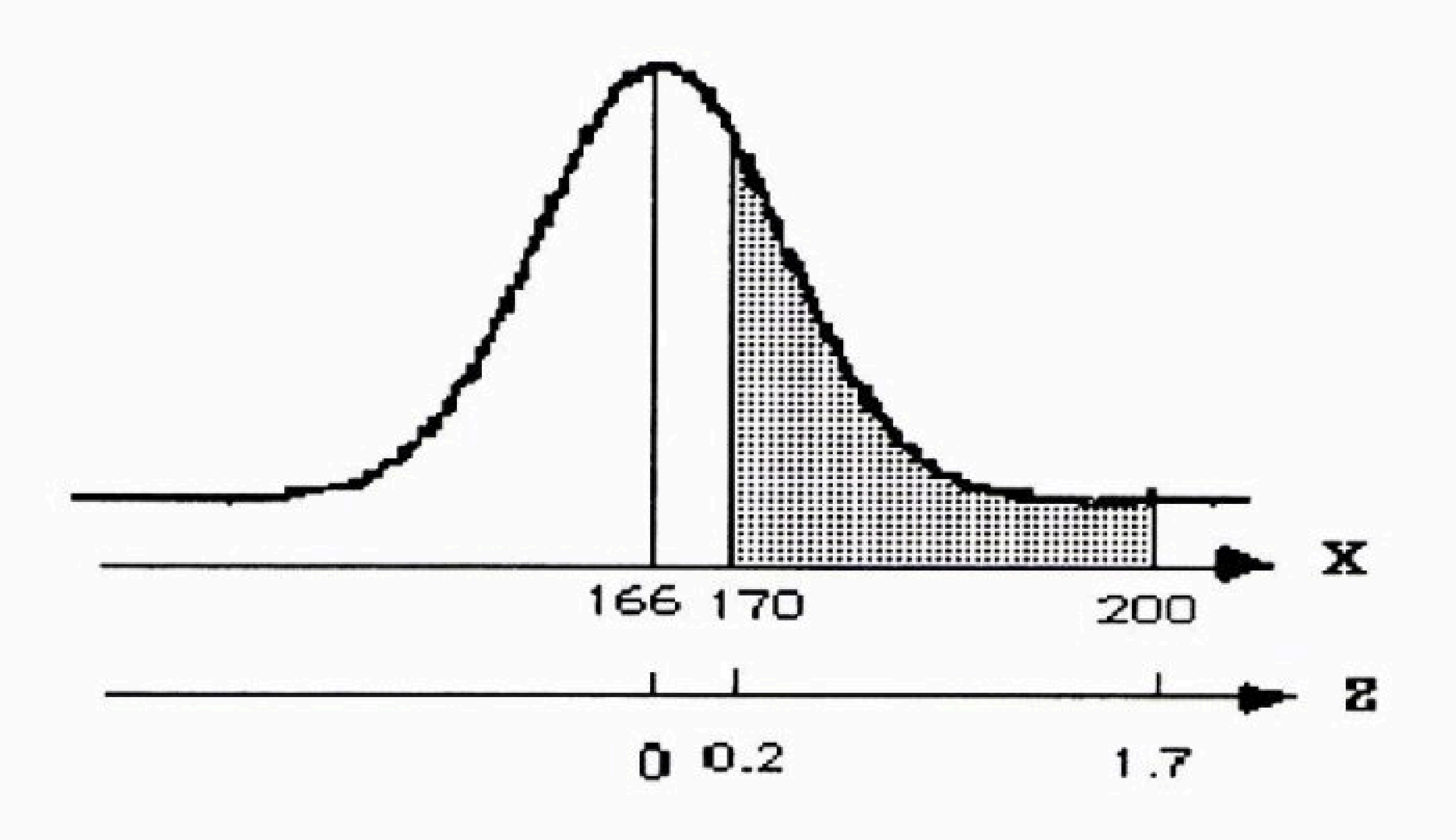
(أ) $P(170 < X < 200)$ ،

(ب) $P(148 \le X \le 172)$.

الحل

عند مقارنة $M(t) = e^{166t + 200t^2}$ بالدالة المولدة للعزوم للمتغير الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ نجد أن $\mu = 166 \, , \ \sigma^2 = 400$

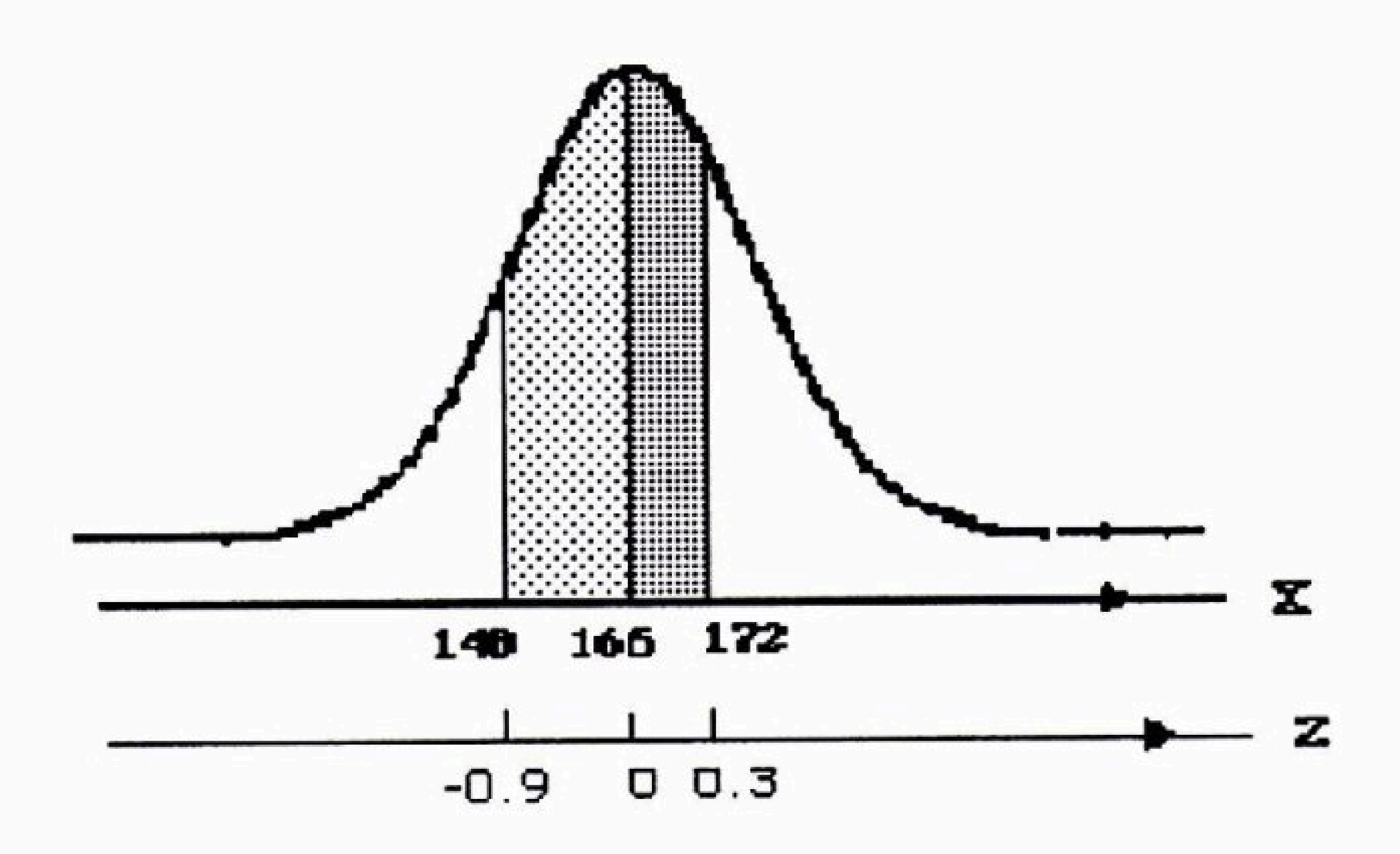
لإيجاد الاحتمالات المطلوبة نحوّل قيم المتغير العشوائي X إلى قيم معياريةZ وذلك باستخدام الصيغة $z = \dfrac{x - 166}{20}$



الشكل رقم (٧ , ١٩). المنحنى الطبيعي.

(أ) عنـد $x = 170$ نحصل عـلـى $z = \frac{170 - 166}{20} = 0.2$ ، وعنـد $x = 200$ نحصل على $z = \frac{200 - 166}{20} = 1.7$ ، ومن الجدول (٣) نجد أن:

$$\begin{aligned} P(170 < X < 200) &= P(0.2 < Z < 1.7) \\ &= P(0 < Z < 1.7) - P(0 < Z < 0.2) \\ &= 0.4554 - 0.0793 = 0.3761 \end{aligned}$$



الشكل رقم (٢٠ , ٧). المنحنى الطبيعي.

(ب) عندما تكون $x = 148$ نحصل على $z = \frac{148 - 166}{20} = -0.9$ ، وعندما $x = 172$ نحصل على $z = \frac{172 - 166}{20} = 0.3$ ، ومن الجدول (٣) نحصل على:

$$P(148 < X < 170) = P(-0.9 < Z < 0.3)$$
$$= P(-0.9 < Z < 0) + P(0 < Z < 0.3)$$
$$= 0.3159 + 0.1179 = 0.4338$$

مثال ٧,٥,١٠

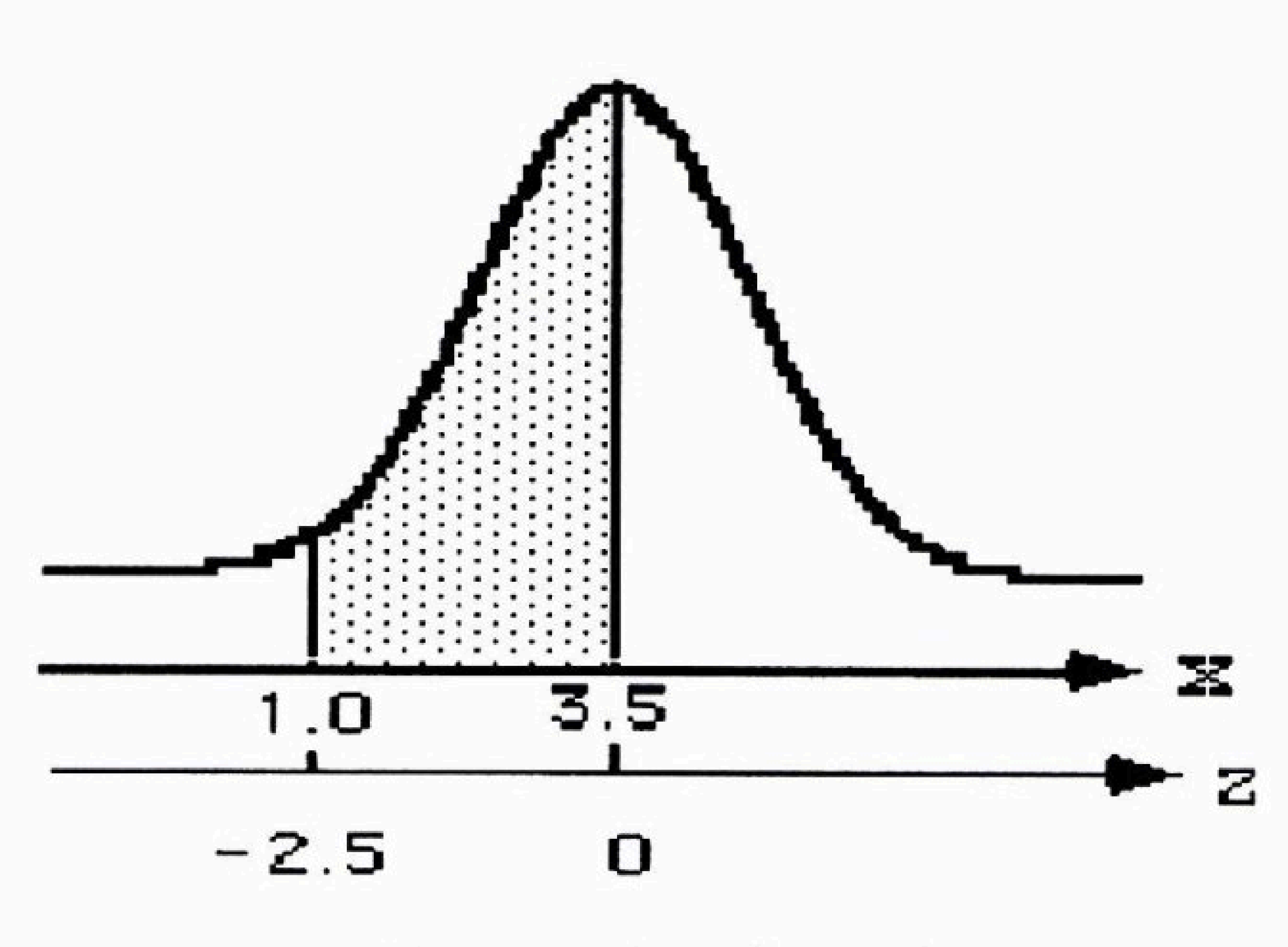
إذا كانت مدة صلاحية غسالة كهربائية تتبع التوزيع الطبيعي بـمـتـوسـط $\mu = 3.5$ (سنة) وبانحراف معياري $\sigma = 1.0$ (سنة). إذا كان هناك ضمان على هذه الغسالة لمدة 12 شهراً، فما نسبة المبيعات المستبدلة؟

الحـل

تساوي نسبة المبيعات التي تستبدل المساحة تحت المنحنى الطبيعي للمتغير $X \leq 1$ (فترة ضمان الغسالة).

حيث إن $\mu = 3.5$ و $\sigma = 1.0$ سوف نحوّل قيمX إلى قيم معيارية، ويكون:

عندما $x = 1.0$ نحصل على $Z = \dfrac{1.0 - 3.5}{1.0} = -2.5$ ، ومن الجدول (٣) نجد أن:



الشكل رقم (٧,٢١). المنحنى الطبيعي.

$$P(X \leq 1.0) = P(Z \leq -2.5)$$
$$= 0.5 - P(-2.5 \leq Z \leq 0)$$
$$= 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

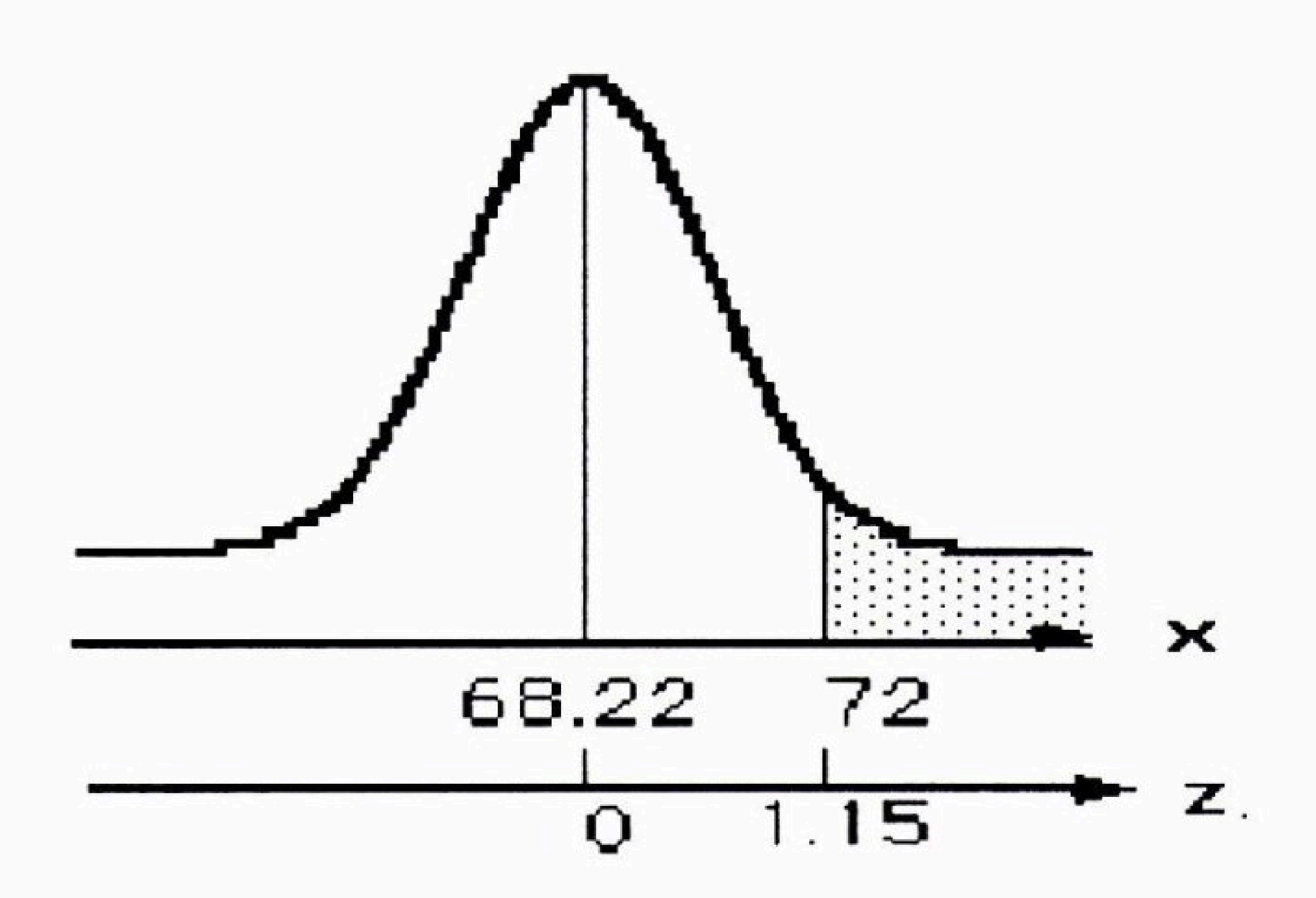
ومن هذا يتضح أن 62% من المبيعات يحتاج إلى تغيير قبل 12 شهرًا.

مثال ١١ , ٥ , ٧

كان متوسط الطول لجنود أحد الجيوش هـو 68.22 بوصة (إنش) وتباين 10.8 بوصة مربعة. إذا كانت الأطوال تتبع التوزيع الطبيعي، فكم عدد الجـنـود الذين يتوقع أن يزيد طولهم على 6 أقدام في سرية مكونة من 1,000 جندي؟

الحـل

حيث إن $\mu = 68.22$ و $\sigma^2 = 10.8$ فإن:



الشكل رقم (٢٢ , ٧). المنحنى الطبيعي.

عندما تكون $x = 72$ ، نحصل على $Z = \frac{72 - 68.22}{\sqrt{10.8}} = \frac{3.78}{3.29} = 1.15$ ، ومن الجدول(٣) نجد أن:

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 72) &= P(Z \geq 1.15) \\
&= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.15) \\
&= 0.5 - 0.3749 = 0.1251
\end{aligned}
$$

إذا كان يوجد 1,000 جندي في سرية، فإن عدد الجنود الذين تزيد أطوالهم على 6 أقدام أو 72 بوصةهو:

$$(1000) . (0.1251) = 125$$

٧ , ٥ , ٧ تقريب ذي الحدين للتوزيع الطبيعي

يمكن تقريب توزيع ذي الحدين $b(x; n, p)$ بتوزيع طبيعي عندما تكون $np(1 - p)$ كبيرة جدا وتكون n كبيرة بمقدارٍ كافٍ؛ أي إذا كانت $np \geq 5$ و $nq \geq 5$.
لاحظ أن احتمال أن يأخذ متغير ذي الحدين العشوائي X قيمة معينة x هو:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \; ; \quad 0 \leq x \leq n \, , \; q + p = 1$$

ويكون للمتغير العشوائي X المتوسط والتباين

$$\mu = E(X) = np \, , \; \sigma_x^2 = Var(X) = npq$$

إذا عرفنا متغيرًا عشوائيًا جديدًا Z معطى بالعلاقة:

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

فإنه من الواضح أن:

$$E(Z) = \mu_z = 0\ ,\ \ Var(Z) = \sigma_z^2 = 1$$

وبأخذ النهاية عندما تؤول n إلى ما لانهاية فإنه يمكن القول إن المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي القياسي.
مما سبق يمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية ١ , ٥ , ٧

إذا كانت X_n تمثل عدد حالات النجاح في n محاولة مستقلة، ولكل محاولة احتمال نجاح p ، فإنه لأي $a < b$ تكون:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left\{a \le \frac{x_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \phi(b) - \phi(a)$$

ملاحظة ١ , ٧ , ٥ , ٧

تعرف هذه النظرية بنظرية دي موافر- لابلاس المركزية (DeMoiver-Laplace limit theorem)، وهي حالة خاصة من النظرية المعروفة باسم نظرية النزعة المركزية (central limit theorem).
ولإثبات هذه النظرية سنحاول استخدام الدالة المولدة للعزوم.

البرهان

من تعريف الدالة المولدة للعزوم حول الصفر لمتغير عشوائي Z نحصل على:

$$M(t) = E(e^{tz}) = E\left[e^{t\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)}\right]$$

$$= e^{\frac{-npt}{\sqrt{npq}}} E\left[e^{\frac{xt}{\sqrt{npq}}}\right]$$

$$= e^{\frac{-npt}{\sqrt{npq}}} \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} e^{\frac{xt}{\sqrt{npq}}}$$

$$= e^{\frac{-npt}{\sqrt{npq}}} \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(p\, e^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}\right)^x q^{n-x}$$

$$= e^{\frac{-npt}{\sqrt{npq}}} \left(q + pe^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}\right)^n$$

$$= \left(qe^{\frac{-npt}{\sqrt{npq}}} + pe^{\frac{qt}{\sqrt{npq}}}\right)^n$$

$$= \left[q \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-pt}{\sqrt{npq}}\right)^r}{r!} + p \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{qt}{\sqrt{npq}}\right)^r}{r!}\right]$$

$$= \left[q\left\{1 - \frac{pt}{\sqrt{npq}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{pt}{\sqrt{npq}}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{pt}{\sqrt{npq}}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{pt}{\sqrt{npq}}\right)^4 \dots\right\}\right.$$

$$\left. + p\left\{1 + \frac{qt}{\sqrt{npq}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{qt}{\sqrt{npq}}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{qt}{\sqrt{npq}}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{qt}{\sqrt{npq}}\right)^4 \dots\right\}\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{t^2}{2!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{t^3}{3!} \cdot \frac{q-p}{n\sqrt{npq}} + \frac{t^4}{4!} \cdot \frac{q^2 - qp + p^2}{n^2 pq} + \dots\right]^n$$

وبأخذ اللوغاريتم لكل طرف نحصل على:

$$\log M(t) = n \log\left[1 + \frac{t^2}{2!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{t^3}{3!}\cdot\frac{q-p}{n\sqrt{npq}} + \frac{t^4}{4!}\cdot\frac{1-3pq}{n^2pq} + \ldots\right]$$

$$= \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\cdot\frac{q-p}{\sqrt{npq}} + \frac{t^4}{4!}\cdot\frac{1-6pq}{npq} + \ldots$$

بأخذ النهاية عندما تؤول n إلى ما لانهاية نجد أن:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \log_e M(t) = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

وحيث إن $e^{\frac{t^2}{2}}$ هي الدالة المولدة للعزوم حول الصفر لمتغير طبيعي قياسي، فإنه من الواضح أن للمتغير Z توزيعًا طبيعيًا قياسيًا أو يتبع التوزيع القياسي.

ملاحظة ٢ , ٧ , ٥ , ٧

يمكن ملاحظة أن متغير ذي الحدين متغير منفصل، بينما احتمال المنحنى الطبيعي احتمال فترة؛ أي أنه عند استخدام مساحات المنحنى الطبيعي لحساب احتمالات ذي الحدين فيمكن الاستعاضة عن قيمة متغير ذي الحدين بفترة قبل حساب قيم Z ، لذلك فإن القيمة x تصبح فترة من $x - 0.5$ إلى $x + 0.5$ ، وهذا النوع من التعديل يسمى تصحيح الاتصال (continuity correction)؛ فمثلا القيمة المعدلة 5 هي فترة من 4.5 إلى 5.5.

مثال ١٢ , ٥ , ٧

إذا رميت قطعة معدنية 20 مرة، فأوجد احتمال عدد الصور الظاهرة بين 10 صور و 14 صورة باستخدام تقريب التوزيع الطبيعي لتوزيع ذي الحدين.

الحـل

إذا كان X يمثل عدد الصور (H) الظاهرة، فإن دالة الاحتمال للمتغيـر X هي:

$$f(x) = \binom{20}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{20-x}$$

والاحتمـــــال المطلوب هو $P(10 \le X \le 14)$ ، وحتى يمكننا استخدام مساحات المنحنى الطبيعي، فلابد أن تعـــــدل كل القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X وتكون فترة القـيـم $10 \le X \le 14$ هي الفتـرة $9.5 \le X \le 14.5$ عندما تكـون $\mu = np = 20\left(\frac{1}{2}\right) = 10$ ، $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{5} = 2.24$.

ويمكننا حساب قيم Z عند النقطة $x = 9.5$ فنجد أن:

$$Z = \frac{9.5 - 10}{2.24} = -0.22$$

وعند النقطة $x = 14.5$ نحصل على:

$$Z = \frac{14.5 - 10}{2.24} = 2.01$$

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن:

$$\begin{aligned} P(10 \le X \le 14) &= P(-0.22 \le Z \le 2.01) \\ &= P(-0.22 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2.01) \\ &= 0.0871 + 0.4778 = 0.5649 \end{aligned}$$

مثال ١٣, ٥, ٧

إذا كان X يمثل عدد مرات ظهور الصورة (H) عند رمي قطعة معدنية 40 مرة، فأوجد احتمال الحادثـة $\{X = 20\}$ مستخدمًا تقريب التوزيع الطبيعي، ثـم قارن النتيجة مستخدمًا توزيع ذي الحدين.

الحـل

باستخدام التقريب الطبيعي نحصل على:

$$P(X=20) = P(19.5 < X < 20.5)$$
$$= P\left(\frac{19.5 - 20}{\sqrt{10}} < \frac{x - 20}{\sqrt{10}} < \frac{20.5 - 20}{\sqrt{10}}\right)$$
$$= P\left(-0.16 < \frac{x - 20}{\sqrt{10}} < 0.16\right)$$
$$= \phi(0.16) - \phi(-0.16) = 0.1272$$

أما باستخدام ذي الحدين فنحصل على النتيجة التالية:

$$P(X=20) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$
$$= \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} = 0.1268$$

يلاحظ أن الفرق بين النتيجتين للاحتمال عند حسابه مباشرة باستخدام توزيـع ذي الحدين أو عند حسابه باستخدام التقريب إلى التوزيع الطبيعي قليل جـدًا ولايزيد على 0.0004 .

مثال١٤ , ٥ , ٧

رميت قطعتا نرد 180 مرة. استخدم التوزيع الطبيعي المقرب لإيجاد احتمال أن المجموع 7 يظهر:

(أ) على الأقل 25 مـرة .

(ب) بيـن 33 و 41 مـرة .

(جـ) 30 مرة على وجه الدقة.

الحل

إذا كان X يمثل عدد مرات ظهور المجموع 7 عند رمي قطعتي نرد، فإن المتغير X متغير ذي الحدين بمعلمة n = 180 و $p = \frac{1}{6}$، لإيجاد الاحتمالات المطلوبة، سوف نستخدم المنحنى الطبيعي المقرب بمعلمة $30 = 180\left(\frac{1}{8}\right) = \mu = np$ و $5 = \sqrt{25} = \sqrt{180\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)} = \sigma = \sqrt{npq}$.

(أ) على الأقل 25 تبدأ من 24.5 إلى مالانهاية؛ أي أنه على الأقل 25 تصبح الفترة من 24.5 إلى ما لانهاية، وتكون قيمة Z المناظرة هي:

$$Z = \frac{24.5 - 30}{5} = -1.1$$

وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن:

$$P(\text{على الأقل } 25) = \sum_{x=25}^{180} b\left(x;\, 180,\, \frac{1}{6}\right)$$

$$= P(-1.1 \le z < \infty)$$

$$= P(-1.1 \le z \le 0) + P(0 \le z < \infty)$$

$$= 0.3643 + 0.5 = 0.8643$$

(ب) تستبدل الفترة المعدلة $32.5 \le X \le 41.5$ بالفترة $33 \le X \le 41$، وتكون قيم Z المناظرة هي:

عند النقطة x = 32.5 نحصل على $0.5 = \frac{32.5 - 30}{5} = Z$، وعند النقطة x = 41.5 نحصل على $2.3 = \frac{41.5 - 30}{5} = Z$، وباستخدام جدول التوزيع

الطبيعي القياسي نجد أن:

$$\begin{aligned} P(33 \le X \le 41) &= P(0.5 \le Z \le 2.3) \\ &= P(0 \le Z \le 2.3) - P(0 \le Z \le 0.5) \\ &= 0.4893 - 0.1915 = 0.2978 \end{aligned}$$

(جـ) يمكن أن تستبدل الفترة من 49.5 إلى 30.5 بالقيمة 30 ، وتكون قيم Z المناظرة هي:

عند النقطة $x = 29.5$ نحصل على $Z = \frac{29.5 - 30}{5} = -0.1$ ، وعند النقطة $x = 30.5$ نحصل على $Z = \frac{30.5 - 30}{5} = +0.1$ ، وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي نحصل على:

$$\begin{aligned} P(X = 30) &= P(-0.1 \le Z \le 0.1) \\ &= (2)\,(0.0398) \\ &= 0.0796 \end{aligned}$$

٨ , ٥ , ٧ تقريب بواسون للتوزيع الطبيعي

يمكن لتوزيع بواسون $P(x; \mu)$ أن يقرّب لتوزيع طبيعي عندما تؤول μ إلى مالانهاية ($\mu \longrightarrow \infty$).

احتمال متغير بواسون X العشوائي الذي يأخذ القيمة x هو:

$$P(X = x) = f(x) = \frac{e^{-\mu} - \mu^{x}}{x!}\ ,\ \ x = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

ويكون للمتغير X متوسط يساوي التباين؛ أي $E(X) = Var(X) = \mu$

نفرض أن المتغير الجديد Z هو $Z = \frac{x - \mu}{\sqrt{\mu}}$ ، وبذلك يكون متوسط المتغير

العشوائي Z وتباينه هما $E(Z) = 0$ و $Var(Z) = 1$.

عندما تؤول μ إلى مالانهاية($\mu \longrightarrow \infty$)، فإن المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي القياسي.

سوف نستخدم الآن الدالة المولدة للعزوم حول الصفر لتوضيح ما سبق.

الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للمتغير Z هي :

$$M(t) = E(e^{tZ}) = E\left[e^{-t\frac{(X-\mu)}{\sqrt{\mu}}}\right]$$

$$= e^{\frac{-t}{\sqrt{\mu}}} E\left[e^{\frac{tX}{\sqrt{\mu}}}\right]$$

$$= e^{\frac{-t}{\sqrt{\mu}}} \sum_{x=0}^{\infty} e^{\frac{tX}{\sqrt{\mu}}} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

$$= e^{\frac{-t}{\sqrt{\mu}}} e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(\mu e^{\frac{t}{\sqrt{\mu}}}\right)^x}{x!}$$

$$= e^{\frac{-t}{\sqrt{\mu}}} e^{-\mu} \left[1 + \mu e^{\frac{t}{\sqrt{\mu}}} + \frac{\left(\mu e^{\frac{t}{\sqrt{\mu}}}\right)^2}{2!} + \dots\right]$$

$$= e^{\frac{-t}{\sqrt{\mu}}} e^{-\mu} \mu e^{\frac{t}{\sqrt{\mu}}}$$

$$= e^{\frac{-t}{\sqrt{\mu}}} e^{\mu\left(e^{t/\sqrt{\mu}} - 1\right)}$$

بأخذ اللوغاريتم (للأساس e) نحصل على:

$$\log_e M(t) = -t\sqrt{\mu} + \mu\left(e^{\frac{t}{\sqrt{\mu}}} - 1\right)$$

$$= -t\sqrt{\mu} + \mu\left[1 + \frac{t}{\sqrt{\mu}} + \frac{t^2}{2!\,\mu} + \frac{t^3}{3!\,\mu\sqrt{\mu}} + \ldots - 1\right]$$

$$= -t\sqrt{\mu} + t\sqrt{\mu} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!\,\sqrt{\mu}} + \frac{t^4}{4!\,\mu} + \ldots$$

$$= \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!\,\sqrt{\mu}} + \frac{t^4}{4!\,\mu} + \ldots$$

بأخذ النهاية نحصل على

$$\lim_{\mu \to \infty} \log M(t) = \frac{t^2}{2}$$

أو أن

$$\lim_{\mu \to \infty} M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

وهذه هي الدالة المولدة للعزوم حول الصفر للتوزيع الطبيعي القياسي، ومن هذا يتضح أن توزيع بواسون يقترب إلى التوزيع الطبيعي كلما اقترب μ من مالانهاية.

٩, ٥, ٧ حساب التكرارات المتوقعة

يمكن حساب التكرارات المتوقعة (expected frequencies) باستخدام المساحات تحت المنحنى لفترات مختلفة. تعطى المساحة تحت المنحنى لأي فترة (فئة) $x_i - \frac{h}{2}$ إلى $x_i + \frac{h}{2}$ بالتكامل:

$$\int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx$$

حيث إن x_i مركز الفئة i و h هو طول الفئة. لاستخدام جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي يلزمنا تحويل هذه القيم إلى قيم معيارية Z ؛ أي أننا نكتب:

$$Z = \frac{x_i + \frac{h}{2} - \bar{x}}{S} \quad , \quad Z = \frac{x_i - \frac{h}{2} - \bar{x}}{S}$$

استخدمنا $\bar{x}$ و S عوضاً عن μ و σ^2، وحيث إن المنحنى الطبيعي في الفترة $(\infty , \infty-)$ فيمكننا إيجاد المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي من ∞- إلى قيمة من قيم Z (من الجدول رقم ١ , ٥). يمكن إيجاد المساحات المناظرة للفئات كما يلي:

$$\phi\left[\frac{x_i + \frac{h}{2} - \bar{x}}{S}\right] - \phi\left[\frac{x_i - \frac{h}{2} - \bar{x}}{S}\right] = \Delta\phi\left[\frac{x_i - \frac{h}{2} - \bar{x}}{S}\right]$$

وللحصول على التكرارات المتوقعة نضرب المساحة المناظرة (المقابلة) في n (n هو التكرار الكلي للتوزيع).

١٠ , ٥ , ٧ حساب إحداثيات التوزيع الطبيعي

إذا كان لدينا الرغبة في تمثيل المنحنى المطابق لمجموعة من البيانات بيانياً، يلزمنا معرفة ارتفاعات (أطوال) عدد من الإحداثيات (cordinates)، ويمكننا كتابة معادلة المنحنى الطبيعي كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{S}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\right] \quad , \quad z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S}$$

حيث إن x_i مركز الفئة i ذات طول h. ارتفاعات (أطوال) الإحداثيات للمنحنى الطبيعي القياسي في $\frac{f_i}{h}$ ، والمناظرة لقيم Z تعطى كما يلي:

$$\phi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad , \quad i = 1, 2, 3, ..., k$$

تعطى قيم $\phi(z_i)$ بالجدول 2.

وحيث إن n تمثل التكرار الكلي، فإنه للحصول على أطوال الإحداثيات في وحدات من h تضرب قيم $\phi(z_i)$ في nh. ويمكن الحصول على إحداثيات المنحنى المطابقة من العلاقة:

$$f(x) = \frac{nh}{S} \phi(z_i)$$

يوضح المثال التالي مطابقة المنحنى الطبيعي لمجموعة من البيانات أو المشاهدات.

مثال ١٥ , ٥ , ٧

ادرس مطابقة المنحنى الطبيعي لتوزيع الأوزان التالية:

الوزن كجم	28-31	32-35	36-39	40-43	44-74	48-51	52-55	56-59	60-63	64-67
f_i	1	14	56	172	245	263	156	57	23	3

الحـل

نقوم أولا بعملية حساب المتوسط والانحراف المعياري لهذا التوزيع :

الوزن	مركز الفئة x_i	التكرار f_i	$u_i = \frac{x_i - 49.5}{4}$	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$
28-31	29.5	1	-5	-5	25
32-35	33.5	14	-4	-56	224
36-39	37.5	56	-3	-168	504
40-43	41.5	172	-2	-344	688
44-47	45.5	245	-1	-245	245
48-51	49.5	263	0	0	0
52-55	53.5	156	1	156	156
56-59	57.5	67	2	134	268
60-63	61.5	23	3	69	207
64-67	65.5	3	4	12	48
$\sum$	-	1,000	-	-447	2,365

$$\overline{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n}, \quad h = 49.5 + \frac{-477}{1000}.4 = 49.5 - 1.79 = 47.71 \text{ kg}$$

نكتب الآن

$$S = h \cdot \sqrt{\frac{\sum f u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f u_i}{n}\right)^2}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{\frac{2365}{1000} - \left(\frac{-477}{1000}\right)^2}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{2.365 - 0.1998}$$

$$= 4\sqrt{2.1652} = 4(1.47) = 5.88 \text{ kg}$$

نقوم ثانيا بحساب التكرارات المتوقعة وإحداثيات التوزيع الطبيعي كما هـو مبين بالجدول التالي:

x_i	$x_i - \frac{h}{2}$	$z_i = \frac{x_i - \frac{h}{2} - \bar{x}}{S}$	$\phi(z_i)$	$\Delta\phi$	التكرار المتوقع $n\Delta\phi$	التكرار f	$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$	$\phi(z_i)$	$\frac{nh}{S}\phi(z)$
	$-\infty$	$-\infty$	0	0.0003					
29.5	27.5	-3.44	0.0003	0.0026	3	1	-3.10	6.6033	2.24
33.5	31.5	-2.76	0.0029	0.0159	16	14	-2.42	0.0213	14.49
41.5	39.5	-2.08	0.0188	0.0620	62	56	-1.74	0.0878	59.73
45.5	43.5	-1.4	0.0808	0.1581	158	172	-1.06	0.2275	154.76
45.5	43.5	-0.71	0.2389	0.2491	249	245	-0.38	6.3712	252.52
49.5	47.5	-0.03	0.4880	0.2509	251	263	0.30	0.3814	258.45
53.5	51.5	0.64	6.7389	0.1677	168	156	0.98	0.2468	167.89
75.5	55.5	1.32	0.9066	0.0712	71	67	1.66	0.1006	68.44
61.5	59.5	2.01	0.9778	0.0185	18	23	2.35	0.0252	17.14
65.5	63.5	2.68	0.9963	0.0033	4	3	3.03	0.0041	2.79
	67.5	3.37	0.9996	0.0004					
	∞	∞	1,000						
المجموع					1,000	1,000			

٦, ٧ تمـــاريـــن

١- أوجد الدالة المولدة للعزوم الأربعة الأولى للتوزيع المستطيل على الفتــرة $(-1/2 , 1/2)$

٢- (أ) إذا كان معدل صلاحية جهاز تليفزيــون 12 شهراً. ما احتمال أن تكون مدة الصلاحية أكثر من 18 شهرا. افترض أن التوزيع توزيع أسي.

(ب) إذا كان للمتغير X توزيع أسي معطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

ما متوسط، وتباين، والدالة المولدة للعزوم للمتغير X؟ احسب الاحتمالات التالية:

١- $P(X > 3)$

٢- $P(X > 5 \mid x > 2)$

٣- (أ) أثبت أن الانحراف المعياري لمتغير X لدالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} , \quad x = 0, 1, \ldots$$

هو: $\frac{1}{\alpha}$

(ب) أثبت أن متوسط وتبـايـن الـتـوزيـع الأسـي: $dy = y_0 e^{-x/\sigma} dx$ هو σ

حيث ثابت y_0 ثم أوجد، μ_r' وأثبت أن $a_3 = 4 , a_4 = 9$.

٤- (أ) إذا كان للمتغير العشوائي X دالة كثافة احتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

أوجد التوقع والتباين للمتغير العشوائي.

(ب) دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$f(x) = \frac{a}{e^{-x} + e^{x}} \quad , -\infty < x < \infty$$

أوجد ١- الثابت a .

٢- $P(X < 1)$.

٥- إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين ويتبعان توزيع جاما ، فأوجد التوزيع لكل من:

(أ) $X + Y$

(ب) $\frac{X}{X+Y}$

(جـ) $\frac{X}{Y}$

٦- (أ) إذا كانت معادلة المنحنى الطبيعي هي $f(x) = k\, e^{-\frac{(x^2 - 6x + 9)}{24}}$ ، فأوجد قيمة الثابت k ، ثم أوجد المتوسط والانحراف المعياري.

(ب) أثبت أنه في التوزيع الطبيعي يكون الانحراف المتوسط (عن المتوسط) مساويًا تقريبًا $\frac{4}{5}$ انحرافه المعياري.

٧- (أ) إذا كان X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر $(\mu = 0)$ ، وانحراف معياري 0.6 $(\sigma = 0)$ ، فأوجد $P(X > 0)$ و $P(0.2 < X < 1.8)$.

(ب) في توزيع طبيعي متوسطه الوحدة وانحرافه المعياري (3) ، أوجد

١- $P(3.43 \le X \le 6.19)$.

٢- $P(1.43 \le X \le 6.19)$.

(جـ) أوجد إحداثيات المنحنى الطبيعي عند كل من:

١- $Z = 1.27$.

٢- $Z = -2.08$.

٣- $Z = -0.84$.

٨- أثبت أنه إذا أخضع المتغير العشوائي X للقانون الاحتمالي المنتظم المتصل على الفترة (a , b) أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة تقل عن a+P (b-a) هو p .

٩- إذا مثل المتغير العشوائي الزمن الذي ينقضي حتى يتوقف جهاز منذ بداية تشغيله، وكانت دالة كثافته f(x)، ودالة توزيعه F(x)، فأثبت أن معدل الإخفاق أو توقف الجهاز (failure) هو:

$$Z(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

(أ) أثبت أنه إذا أخضع X للقانون الأسي للاحتمالات فإن معدل الإخفاق أو الفشل يكون مقدارًا ثابتًا؛ أي لايعتمد على الزمن x.

(ب) أثبت أنه إذا أخضع X لقانون وايبل ذي الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} , & x > 0 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فإن معدل التوقف هو:

$$Z(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

١٠- لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \frac{\delta - x}{\alpha - \beta x + \gamma x^2}$$

تحقق أن هذه المعادلة التفاضلية تعطي (بالاختيار المناسب للثوابت α, β, γ, c):

(أ) قانون جاما عندما يكون $\beta > 0$, $\alpha = \gamma = 0$, $\delta > -\beta$.

(ب) القانون الأسي عندما يكون $\alpha = \gamma = \delta = 0$, $\beta > 0$.

(جـ) قانون بيتا عندما يكون $\alpha = 0$, $\beta = -\gamma$, $\frac{\delta - 1}{\beta} < 1$, $\frac{\delta}{\beta} > -1$.

(د) أثبت أنه عندما $\beta = \gamma = 0$, $0 < \alpha$ $\alpha > 0$ فإن المعادلة التفاضلية تؤدي إلى القانون الطبيعي القياسي.

١١- (أ) إذا أخضع المتغير العشوائي Z للتوزيع الاعتدالي المعياري فاحسب احتمال أن يأخذ المتغير قيما

١- أكبر من 1.14 .

٢- أقل من 0.36- .

٣- بين 0.46- و 0.09- .

٤- بين 0.58- و 1.12 .

(ب) إذا كانت z_α هي قيمة Z التي تجعل

$$\int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \alpha$$

، فأوجد قيمة z_α بحيث:

١- $\alpha = 0.01$.

٢- $\alpha = 0.05$.

١٢- إذا كان لدينا توزيع طبيعي متوسطه 12 وانحرافه المعياري 2. أوجد المساحة تحت المنحنى:

(أ) من $X = 10$ إلى $X = 13.5$.

(ب) من $X = 11.4$ إلى $X = 14.25$.

(جـ) من $X = 6$ إلى $X = 18$.

١٣- إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي $N(100, 225)$ فأوجد الاحتمالات التالية:

(أ) $P(X \leq 92.5)$.

(ب) $P(X \leq 107.5)$.

(جـ) $P(X \geq 124)$.

(د) $P(112 \leq X \leq 128.5)$.

(هـ) $P(91 \leq X \leq 127)$.

(و) $P(X \geq 76)$.

١٤- (أ) إذا كان للمتغير التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ ، وكانت $Y = aX + b$ فوضح أن للمتغير العشوائي Y التوزيع الطبيعي $N(a\mu + b\,,\; a^2\sigma^2)$.

(ب) أوجد توزيع المتغير العشوائي $Y = 5X + 10$ إذا كان المتغير X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 10 وتباين 25. ومن ثم أوجد:

١- $P(Y \leq 54)$.

٢- $P(Y \geq 68)$.

٣- $P(52 \leq Y \leq 67)$.

١٥- (أ) إذا كانت درجات امتحان المقابلة الشخصية في كلية التربية تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 500 وانحراف معياري 100 $(\mu = 500\,,\; \sigma = 100)$ ، فأوجد احتمال حصول طالب على درجة :

١- أعلى من 650 .

٢- أقل من 250 .

٣- بين 325 و 675.

(ب) يتطلب الالتحاق بكلية عسكرية طولا معينا. إذا كان الطول المطلوب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط "2 ,'5 وانحراف معياري "4. إذا كان أصغر مطلوب للانضمام إلى الكلية هو "4 ,'5 فما نسبة المرفوضين بسبب أطوالهم؟

١٦- (أ) إذا كان للمتغير X توزيع طبيعي $N(69, 9)$ فأوجد احتمال أن يكون

١- $X < 65$.

٢- $65 \le X \le 70$.

(ب) إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير X هي $M(t) = e^{-6t + 32t^2}$ ، فأوجد $P(-4 \le X < 16)$ و $P(-10 \le X < 0)$.

١٧- إذا كان معدل الوفيات للمصابين بمرض الملاريا 20% فأوجد احتمال أن يكون عدد الوفيات في قرية ما بين 70 و 80 من أصل 500 شخص مصاب.

١٨- أثبت أنه ليس للقانون الأسي للاحتمالات ذاكرة أو هو فاقد الذاكرة (memoryless)؛ أي أثبت أنه إذا خضع المتغير العشوائي X للقانون الأسي فإن:

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

لأي عددين حقيقيين موجبين s, t .

١٩- إذا كان بمقدور قسم الرياضيات في كلية التربية أو كلية العلوم قبول 150 طالبًا من نظام مستويات، وكان احتمال القبول في القسم هو $\frac{3}{10}$. إذا افترضنا أن السياسة التعليمية تنص على قبول 450 طالبًا، احسب احتمال قبول أكثر من 150 طالبًا، واستخدم نظرية لابلاس - ديموافر المركزية لحساب ذلك.

٢٠- مدة صلاحية جهاز مقيسة بالساعات تمثل بمتغير عشوائي متصل دالة كثافته:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{\frac{-1}{100x}} , & x \ge 0 \\ 0 , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(أ) احسب قيمة λ.

(ب) ما احتمال أن يعمل الجهاز في الفترة [50, 150]؟

(جـ) أوجد احتمال أن يعمل الجهاز لمدة أقل من 100 ساعة.

٢١- تصل حافلة لنقل الطلبة إلى بوابة الكلية في فترات زمنية طولها 15 دقيقة؛ أي بعد كل ربع ساعة بدءا من الساعة السابعة صباحا أي أن الفترات هي ... ,7.00, 7.15, 7.30 إذا وصل طالب إلى موقف الحافلة المعتاد في فترة زمنية موزعة توزيعًا منتظمًا بين (7, 7:30)، فأوجد مقدار احتمال أن ينتظر الطالب:

(أ) أقل من 5 دقائق.

(ب) أكثر من 10 دقائق.

٢٢- يعمد المدرس عادة في امتحان مادة ٢٤١ (إحص) في إعطاء التقديرات باستخراج طريقة المنحنى الطبيعي (normal curve) ، أي يستخدم درجات الطلاب وسيلة لتقدير معالم التوزيع الطبيعي μ وσ^2 ، ومن ثم يعطي تقدير "A" للطلبة الحاصلين على درجة أعلى من $\mu+\sigma$ ، وتقدير "B" للطلبة الحاصلين على درجة بين μ و $\mu+\sigma$ ، وتقدير "C" للطلبة الحاصلين على درجة بين μ و $\mu-\sigma$ وتقدير "D" للطلبة الحاصلين على درجة بين $\mu-2\sigma$ و $\mu-\sigma$، وتقدير "F" للطلبة الحاصلين على درجة أقل من $\mu-2\sigma$.

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل درجات الطلبة في ذلك الامتحان، فحدد نسب الطلبة الحاصلين على تقديرات A و B و C و D و E و F.

٢٣- ادرس مطابقة التوزيع الطبيعي للبيانات التالية مستخدمًا طريقة المساحة (area method)، ثم احسب إحداثيات التوزيع.

الفئات	40-	45-	50-	55-	60-	65-	70-	75-	80-	85-
التكرار f	07	08	22	38	51	60	45	32	10	24

وقارن بين التكرارات الحقيقية والمتوقعة بيانيًا.



الفصل الثامن

نظرية الموثوقية

● مقدمة ● دالة الموثوقية ودالة معدل الإخفاق
● تطبيقات على بعض التوزيعات الاحتمالية
● الأنظمة المتوازية والمتسلسلة ● تطبيقات على الصيانة ● تمارين

٨,١ مقدمة

تُعدُّ نظرية الموثوقية (reliability theory) واستخداماتها في المجالات المتعددة، من تطبيقات نظرية الاحتمالات المهمة. وتهتم نظرية الموثوقية بدراسة أطوال حياة الأنظمة أو الوحدات المكونه لها. ويتشعب استخدام هذا المفهوم ليشمل عدة مجالات: مثل الأنظمة أو الأجهزة الإلكترونية والوحدات المكونة لها، كأجهزة الراديو والتليفزيون. كما تشمل أجهزة النقل الحديثة كالطائرات والسيارات التي تعمل بأنظمة الحاسب الآلي، بالإضافة إلى أجهزة الدفاع الجوي والرادارات. كما قد تكون الوحدة جزءًا حيويًا في جسم الحيوان أو في جسم الإنسان، وقد يكون المقصود بها طول الحياة لإنسان يعاني من مرض عضال أو مرض يرجى برؤه. وربما يكون طول الحياة المدة التي تعتمد فيها شركات التأمين على التأمين وتحليل المخاطر (risk analysis)، أو طول المدة التي تعمل فيها محطة توليد الطاقة الكهربائية (power station) أو المفاعل النووي دون عطل أو دون توقف إجباري . لعل هذه بعض الأمثلة للتدليل على أهمية نظرية

الموثوقية واستخداماتها في مختلف المجالات العلمية.

سنتعرض في هذا الفصل لأساسيات الموضوع، ونشير في المراجع لبعض الكتب المفيدة في هذا المجال للقراء الراغبين في دراسة أكثر تفصيلا .

٨,٢ دالة الموثوقية ودالة معدل الإخفاق

سبق أن عرّفنا دالة التوزيع الاحتمالية على أنها

$$F(t) = P(X \le t)$$

إذا كان المتغير العشوائي X هو طول حياة جهاز(system) أو طول حياة وحدة (unit) فيه، فإن X متغير عشوائي حقيقي غير سالب؛ أي يأخذ قيمة على الجزء غير السالب من خط الأعداد الحقيقي .

تعريف ٨,٢,١

دالة الموثوقية، ويرمز لها بالرمز R(t)، هي احتمال ألا يقل طول حياة وحدة أو جهاز عن زمن x؛ أي أن

$$R(t) = P(X > t)$$

نلاحظ من التعريف ان

$$R(t) = 1 - P(X \le t)$$
$$= 1 - F(t)$$

تسمى أحيانا R(t) بدالة الصلاحية أو دالة الاعتمادية .

سبق أن ذكرنا بأن علاقة دالة الكثافة الاحتمالية (إن وجدت) ترتبط بدالة التوزيع الاحتمالية كما يلي:

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t)$$

$$= \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{P(t < X \leq t + \Delta t)}{\Delta t}$$

تعني هذه العلاقة، بالتقريب، أن طول الحياة ينتهي في الفترة $(t , t + \Delta t)$ باحتمال $f(t)\ \Delta t$ وبالتالي ، باشتراط أن الوحدة كانت تعمل حتى الـزمـن x، نحصل على تعريف معدل الإخفاق أو معدل الفشل (failure rate) .

تعريف ٢ , ٢ , ٨

يعرّف معدل الإخفاق(الفشل) ، ويرمز له بالـرمـز $r(t)$ ، أنه احتمـال الإخفاق الآني لوحدة في الفتـرة $(t , t + \Delta t)$ إذا علم أنها كانت تعمل حتـى الزمن x ؛ أي أن:

$$r(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{P(t < X \leq t + \Delta t \mid X > t)}{\Delta t}$$

نلاحظ من التعريف الســابق أن:

$$r(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{P(X \leq t + \Delta t) - P(X \leq t)}{\Delta t\ P(X > t)}$$

$$= \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{f(t)}{R(t)}$$

تربط العلاقة الأخيرة بين: دالة الكثافة الاحتمالية ودالة الموثوقية أو دالة التوزيع ودالة معدل الإخفاق .

نظرية ٨,٢,١

ترتبط دالة الموثوقية بدالة معدل الإخفاق بالعلاقة التالية:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u)\,du\right), \quad t \geq 0$$

البرهان

من تعريف معدل الإخفاق نعلم أن:

$$r(u) = \frac{f(u)}{R(u)}$$

ولكننا نلاحظ:

$$f(u) = \frac{d}{du} F(u)$$

$$= \frac{d}{du}(1 - R(u))$$

$$= -\frac{d\,R(u)}{du}$$

بالتعويض نجد أن:

$$r(u) = -\frac{1}{R(u)} \frac{dR(u)}{du}$$

ومنه نجد أن:

$$-r(u) = \frac{d}{du} \ln R(u)$$

وبتكامل الطرفين من صفر وحتى t نحصل على:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u)\,du\right.$$

وذلك لأن $R(0) = 1$. وبذلك يتم برهان النظرية .

قد نصادف في حياتنا العملية أطوال حياة وحدات مقيسة أو دورات كاملة للآلة، أو عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة أوأي وحدات متقطعة أخرى . وحتى تشمل التعاريف السابقة التوزيعات المتصلة و المتقطعة، فإننا نعرف دالة الموثوقية لمتغير عشوائي نهائي أولانهائي مثلا يأخذ القيم $0, 1, 2, 3, \ldots$. باحتمالات $P_0, P_1, P_3, \ldots$ على أن:

$$R(x) = P(X>x)$$

$$= \sum_{i=x+1}^{\infty} P_i$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{x} P_i$$

$$= 1 - F(x)$$

كما نعرف دالة الإخفاق الاحتمالية على أنها:

$$r(x) = \frac{p_x}{R(x)}$$

٨,٣ تطبيقات على بعض التوزيعات الاحتمالية

تنحصر التطبيقات في هذا البند على التوزيعات الاحتمالية المعرَّفة على خط الأعداد الحقيقية أو على مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة .

مثال ٨,٣,١

أوجد دالة الموثوقية ودالة الإخفاق الاحتمالية للمتغير العشوائي x الذي يتبع التوزيع الأسي (exponential distribution) بدالة كثافة احتمالية

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad , \lambda > 0 , \; t > 0$$

الحل

من تعريف دالة الموثوقية نلاحظ أن :

$$R(t) = P(X>t)$$

$$= \int_t^{\infty} f(u)\, du$$

$$= \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda u}\, du$$

$$= e^{-\lambda t}$$

ومن ذلك نجد أن دالة الإخفاق هي:

$$r(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= \lambda$$

أي أن دالة الإخفاق ثابتة في التوزيعات الأسية .

يمكن الآن إعطاء الخاصية التالية للتوزيع الأسي.

نظرية ٨,٣,١١

إذا كان T متغيرًا عشوائيًا أسيًا بدالة موثوقية معرفة كما يلي:

$$R(t) = \exp(-\lambda t) \; , \qquad t \geq 0$$

فإنه لأي عددين حقيقيين غير سالبين x, t يكون:

$$P(X > x+t \mid X > t) = e^{-\lambda t}$$

البرهان:

لدينا من النظرية ما يلي:

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

ومن ذلك تكون:

$$P(X > x + t) = e^{-\lambda(x+t)}$$

وبالتالي فإن:

$$P(X > x + t \mid X > t) = P(X > x+t) / P(X > t)$$

$$= e^{-\lambda(x+t)} / e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda x}$$

تنص النظرية السابقة على أن احتمال أن يقل طول الحياة وحدة عن $x + t$ إذا علمنا أنها عاشت فترة مقدارها t تساوي احتمال أن يقل طول حياتها عن x ، وبمعنى آخر، أن طول الحياة المستقبلية لا يعتمد على طول الحياة الماضية، وتسمى هذه بخاصية فقدان الذاكرة (memoryless) للتوزيع الأسي.

مثال ٨,٣,٢

أوجد دالة الموثوقية ودالة الإخفاق الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع توزيع وايبل (Weibull distribution) بدالة كثافة احتمالية:

$$f(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}} \quad , \alpha \geq 1 \, , \lambda \geq 0 \, , t \geq 0$$

الحل

نحسب دالة الموثوقية كالتالي:

$$R(t) = P(X>t)$$

$$= \int_t^{\infty} f(u)\, du$$

$$= \int_t^{\infty} \alpha \lambda\ u^{\alpha-1} e^{-\lambda u^{\alpha}}\, du$$

$$= \int_t^{\infty} e^{-\lambda u^{\alpha}}\, d(\lambda u^{\alpha})$$

بالتعويض عن $y = \lambda u^{\alpha}$ ، حيث $dy = d(\lambda u^{\alpha})$
نجد أن:

$$R(t) = \int_{\lambda t^{\alpha}}^{\infty} e^{-y}\, dy$$

$$= e^{\lambda t^{\alpha}}$$

ومن ذلك تكون دالة الإخفاق الاحتمالية هي:

$$r(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$= \alpha \lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}} / e^{-\lambda t^{\alpha}}$$

$$= \alpha \lambda\ t^{\alpha-1}$$

نلاحظ من صيغة دالة معدل الإخفـاق أن $r(t)$ دالة متزايدة لقيم $\alpha > 1$ ، ومتناقصة لقيم $\alpha > 1$ أو ثابتة عندما تكون $\alpha = 1$، (لأنها تكافئ التوزيع الأسي).

يشار عادة إلى الدوال التوزيعية التي يكون فيهــا r(t) متزايدا بــدوال ذات معدل إخفاق أو فشل متــزايــد (increasing failure rate) ويرمز لها بالرمــز م إز (IFR)، أما إذا كان r(t) متناقصة فيقال إن توزيع معدل إخفاق أو فشل متناقص (decreasing failure rate) م إ ن (DFR).

مثال ٣,٣,٨

إذا كان T متغيرًا عشوائيًا يتبع توزيع جاما بدالة كثافة

$$f(t) = \frac{\lambda (\lambda \; t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(n)} \quad , \quad \lambda \geq 0 \, , \, x \geq 0 \, , \, n=1, 2, ...$$

فاوجد معدل الإخفاق وادرس تزايده أو تناق

الحل

سبق أن برهنا أنه إذا كانت n عددًا طبيعيًا موجبًا فإن:

$$\Gamma (n) = n - 1) \, !$$

وأن:

$$\Gamma (n) = n - 1) \, \Gamma (n - 1)$$

من تعريف الموثوقية نجد أن:

$$R (t) = P (X > t)$$

$$= \int_{x}^{\infty} f(u) \, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{t}^{\infty} \lambda (\lambda \; u)^{n-1} e^{\lambda u} \, du$$

باستخدام التكامل بالتجزيء نجد أن

$$R(t) = e^{-\lambda t}\left[1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

من ذلك نجد أن دالة الإخفاق الاحتمالية هي:

$$r(t)=\frac{f(t)}{R(t)}$$

$$r(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{\Gamma(n)}\left[1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]^{-1}$$

نود الآن استخدام صيغة أخرى لدراسة سلوك الدالة $r(x)$ من حيث التزايد أو التناقص، فنكتب:

$$[r(t)]^{-1} = R(t)/f(t)$$

$$[r(t)]^{-1}=\int_x^{\infty}\lambda(\lambda u)^{n-1}e^{-\lambda u}du\,/\,\lambda(\lambda t)^{n-1}e^{-\lambda t}$$

بوضع $u=y+t$ نحصل على

$$[r(t)]^{-1}=\int_0^{\infty}\lambda(y+t)^{n-1}e^{-\lambda(t+y)}dy\,/\,t^{n-1}e^{-\lambda t}$$

$$=\int_0^{\infty}\left(1+\frac{y}{t}\right)^{n-1}e^{-\lambda y}\,dy$$

ومن ذلك نلاحظ أن $r^{-1}(t)$ تكون دالة متناقصة إذا كان $n>1$؛ أي أن الدالة $r(t)$متزايدة لجميع قيم $n>1$، أو بالمثل نلاحظ أن الدالة $r(x)$ متناقصة لجميع

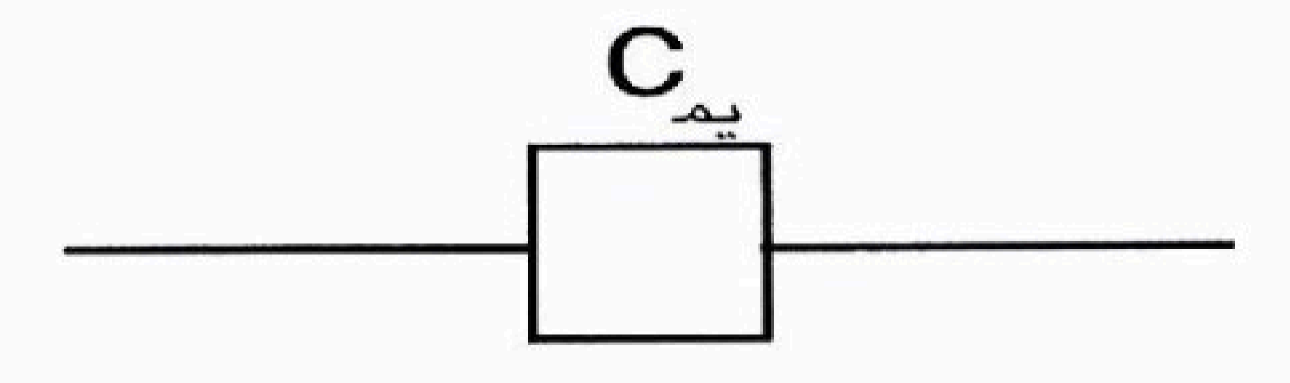
قيم $n < 1$ وتكون الدالة $r(t)$ دالة ثابتة عندما $n = 1$ ، ويصبح التوزيع في الحالة الأخيرة أسيًا.

ملاحظة ٨,٣,١

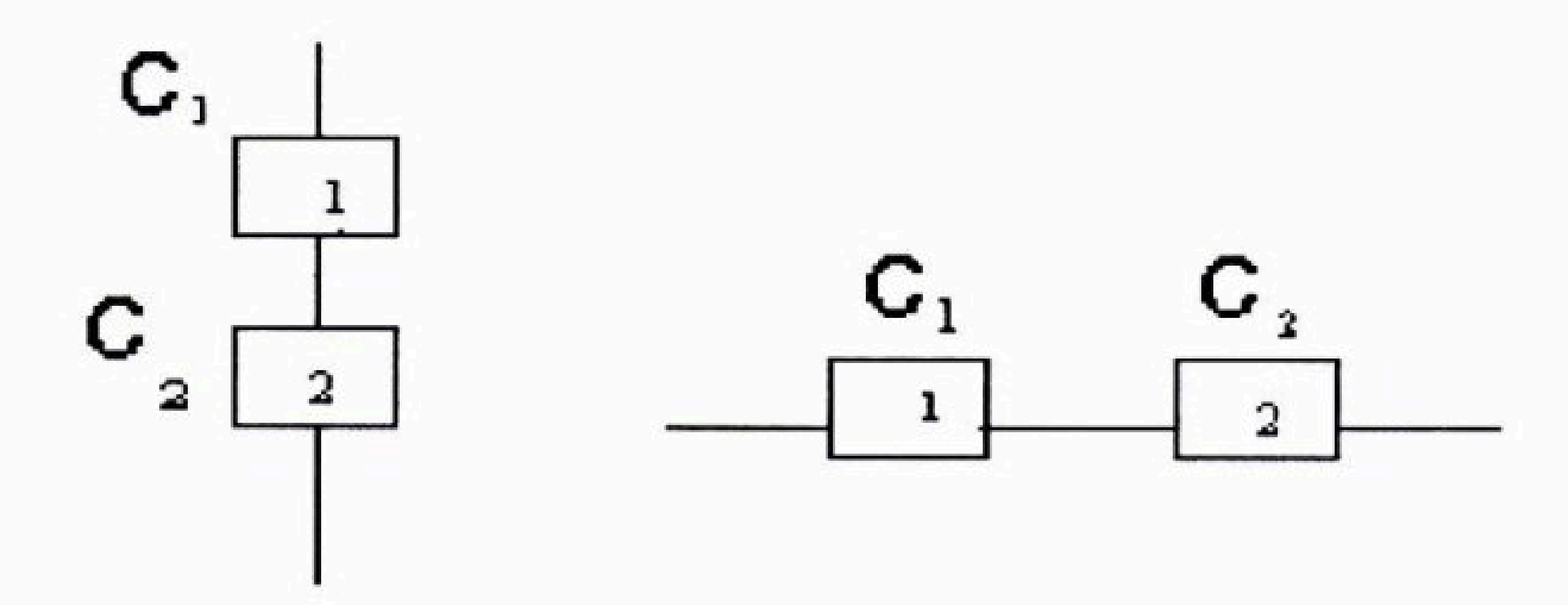
يصعب في كثير من التوزيعات المتقطعة أو المنفصلة إيجاد صيغة مغلقة للمجموع $\sum_{i=x}^{\infty} P_i$ التي تعبر دالة الموثوقية، وبالتالي لا يمكن إيجاد صيغة مغلقة لدالة الإخفاق (الفشل) الاحتمالية.

٨,٤ الأنظمة المتوازية والمتسلسلة

يعتمد توزيع زمن الإخفاق لجهاز ما على العلاقة بين وحداته، أو بصورة أدق على التصميم (design) للجهاز. فكلما زادت وحدات الجهاز أو النظام تعددت أشكال التصاميم الممكنة له. مثلا يوجد تصميم واحد لنظام يتكون من وحدة واحدة فقط كما هو واضح من الشكل رقم (٨,٤,١)، بينما توجد طريقتان لتصميم نظام مكون من وحدتين كما هو واضح من الشكل رقم(٨,٤,٢).

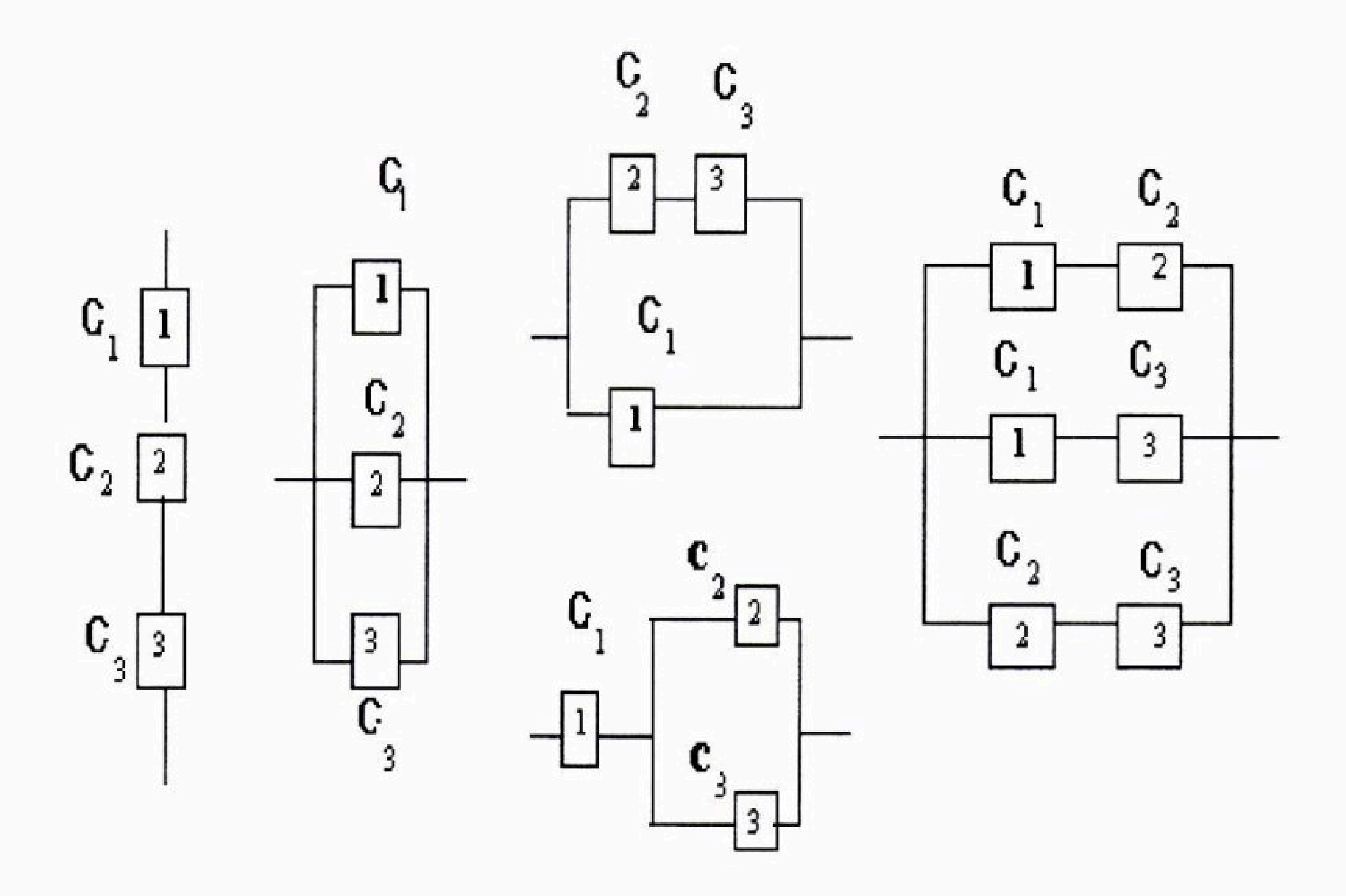


الشكل رقم (٨,٤,١). نظام مكون من وحدة.



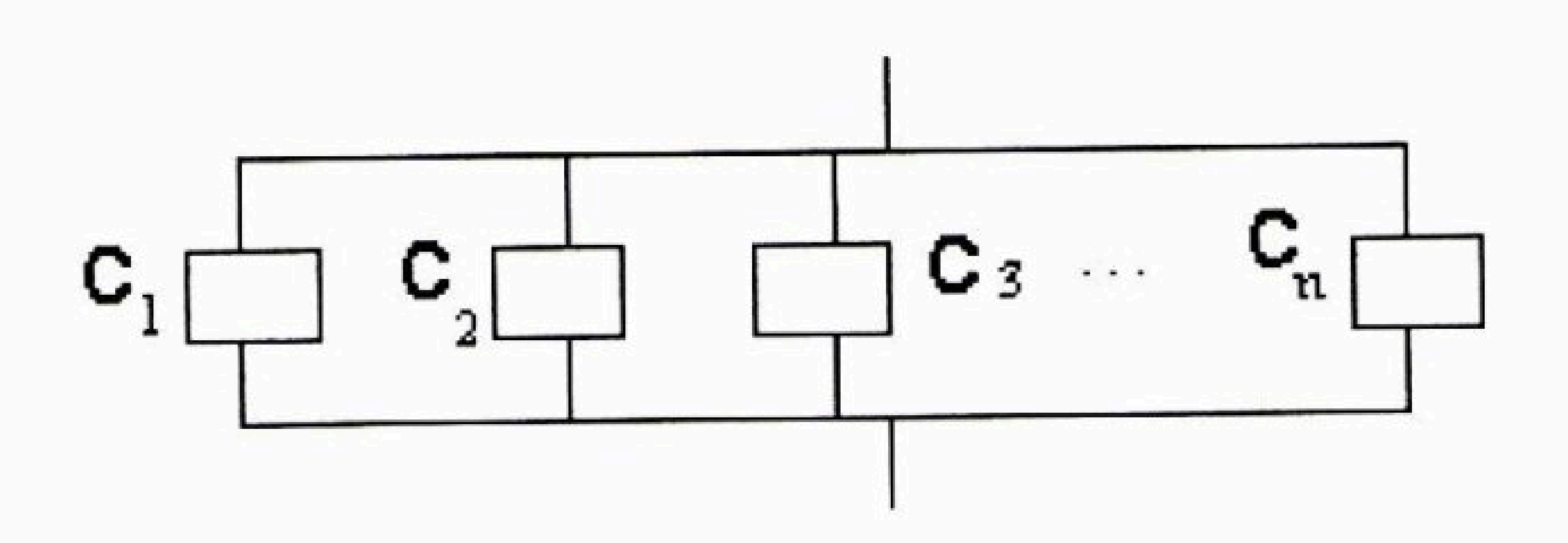
الشكل رقم (٢ , ٤ , ٨). نظام مكون من وحدتين.

أما التصاميم الممكنة لنظام من ثلاث وحدات ، كما في الشكل رقم (٣ , ٤ , ٨)، تصل إلى خمسة تصاميم في حالة تطابق الوحدات وأكثر من ذلك في حالة اختلافها .

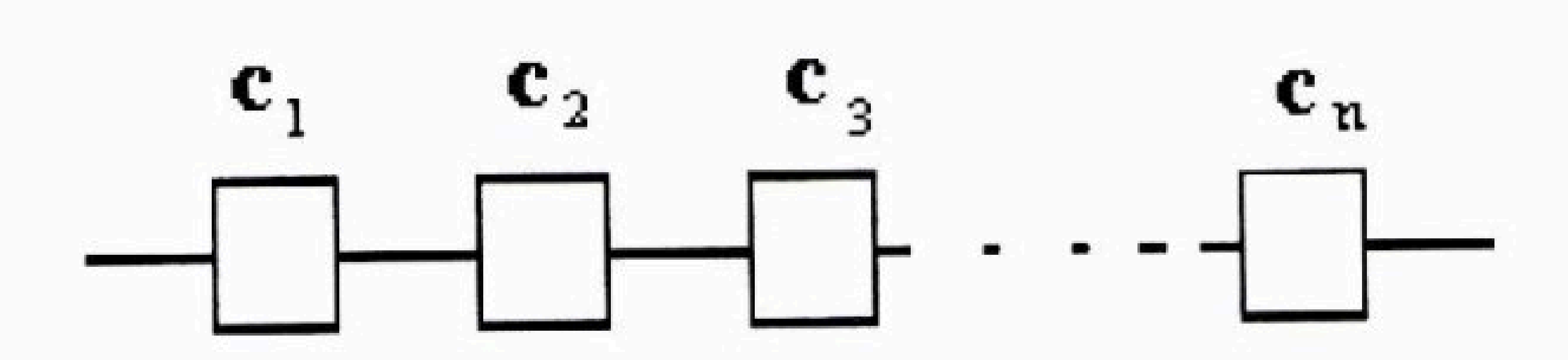


الشكل رقم (٣ , ٤ , ٨). أنظمة مكونة من ثلاث وحدات.

يشترط مهندس الصيانة لجودة التوصيل أن يكون مترابطًا (coherent)، ويقصد بذلك أن لكل وحدة من وحداتـه دورًا تقوم به في عمل النظام، وأن عمـل أي وحدة فيه ينعكس إيجابيًا على عمله. سنـدرس في هذا البند موثوقية بعض هـذه الأنظمـة التي تتميز ببساطتها، وبالأخص الأنظمة المتــوازيــة (parallel systems) الشكل رقم (٤ , ٤ , ٨)، والأنظمـة المتسـلسـلة أو المتوالية (series systems) الشكل رقم (٥ , ٤ , ٨) مهما كان عدد الوحدات الداخلة في تكوينها.



الشكل رقم (٤ , ٤ , ٨). نظام متواز مكون من n وحدة.



الشكل رقم (٥ , ٤ , ٨). نظام متسلسل (على التوالي) مكون من n وحدة.

تعريف ١ , ٤ , ٨

يقال للنظام الذي يعمل - إذا كانت تعمل على الأقل إحدى وحداته - نظام متواز، كما في الشكل رقم (٤ , ٤ , ٨).

تعريف ٢ , ٤ , ٨

يعـــد النظام متسلسـلاً إذا كـان يعمل بشرط أن تعمل جميع وحداته مثال ذلك الشكل رقم (٥ , ٤ , ٨). نقدم فيما يلي طريقة حساب دالة الموثوقيـة ودالـة الإخفاق الاحتمالية في النظامين المتوازي والمتسلسل.

نظرية ١ , ٤ , ٨

إذا كان نظام مكوّن من n وحدة مستقلة وموصلة على التسلسل وموثوقياتها هي $R_i(t)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$، فإن دالة الموثوقية للنظام هي:

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

البرهان

نعرف أن موثوقية النظام هي:

$R(t) = P(T > t)$

$= P$ (يعمل النظام في الزمن t)

$= P$ (جميع وحدات النظام تعمل في الزمن t)

وذلك لأن النظام متسلسل.

$R(t) = P$ (تعمل الوحدة الأولى، . . . ، تعمل الوحدة n في الزمن t)

$= P(T_1>t, T_2>t, \ldots ,T_n>t)$

ولأن الوحدات مستقلة فإن:

$$R(t) = P(T_1 > t)\ .\ P(T_2 > t) \ldots\ P(T_n > t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

أما بالنسبة للنظام المتوازي فإننا نبرهن النظرية التالية:

نظرية ٨,٤,٢

إذا كان نظام مكوّن من n وحدة مستقلة وموصلة مع بعضها على التـوازي وموثوقيتها هي: $R_i(t)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$، فإن موثوقية النظام هي:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - R_i(t)\right]$$

البرهـان

في هذه الحالة

$$R(t) = P(T > t)$$

$= P$ (يعمل النظام في الزمن t)

$= 1 - P$ (النظام لا يعمل بعد الفترة t)

$= 1 - P$ (جميع وحدات النظام لا تعمل بعد فترة t)

ولأن النظام متواز

$R(t) = 1\text{-}P$ (الوحدة الأولى لا تعمل بعد t ، . . . ، الوحدة n لا تعمل بعد t)

$$= 1 - P(T_1 \le t, T_2 \le t, \ldots, T_n \le t)$$

ولأن الوحدات مستقلة عن بعضها تكون:

$$R(t) = 1 - P(T_1 \le t) \,.\, P(T_2 \le t) \ldots P(T_n \le t)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(T_i \le t)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - P(T_i > t)\right]$$

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - R_i(t)\right]$$

وجدنا في البند ٢, ٨ أن:

$$r(t) = -\frac{d}{dt} \ln R(t)$$

وعندما يكون النظام متسلسلا فإن:

$$r(t) = -\frac{d}{dt} \ln \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

$$= -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \ln R_i(t)$$

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{d}{dt} \ln R_i(t) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i(t)$$

أي أن دالة معدل الإخفاق لنظام متسلسل تساوي مجموع دوال معدل الإخفـاق للوحدات المكونة له.

مثال ١ , ٤ , ٨

لدينـــا وحدتـــان مستقلتـــان يتبع توزيع الحيــــاة فيهما التوزيع الأسي وبمعلومتين $\lambda_2 = 0.05$, $\lambda_1 = 0.01$ وُصّلتا معا لتكوِّنا نظاما مترابطا (coherent)،

فأوجد موثوقية النظام في حالة:

(أ) توصيل الوحدتين على التسلسل.

(ب) توصيل الوحدتين على التوازي

الحل

نلاحظ من معطيات المثال أن:

$$R_1(t) = e^{-0.01\,t} \quad , \quad R_2(t) = e^{-0.05\,t}$$

وهما موثوقية الوحدتين.

(أ) عند توصيل الوحدتين على التسلسل تكون موثوقية النظام هي:

$$R(t) = \prod_{i=1}^{2} R_i(t)$$

$$= R_1(t) . R_2(t)$$

$$= e^{-0.01\,t} . e^{-0.05\,t}$$

$$= e^{-0.06\,t}$$

(ب) عند توصيل الوحدتين على التوازي تكون موثوقية النظام هي:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{2} (1 - R_i(t))$$

$$= 1 - (1 - R_1(t)).(1 - R_2(t))$$

$$= 1 - \left[1 - R_1(t) - R_2(t) + R_1(t) . R_2(t) \right]$$

$$= R_1(t) + R_2(t) - R_1(t) . R_2(t)$$

$$= e^{-0.01\,t} + e^{-0.05\,t} + e^{-0.06\,t}$$

يلاحظ أنه يمكن حساب احتمال أن يعمل النظام أو الوحدات لمدة زمنية معينة لا تقل عن t_0 مثلا، أو ذلك بالتعويض في دوال الموثوقية المناظرة لأي منها. كما يمكن حساب معدل الإخفاق الاحتمالي لكل منهما.

على سبيل المثال، نلاحظ أن معدل الإخفاق للوحدة الأولى:

$$r(t) = -\frac{d}{dt}\ln R_1(t)$$

$$= -\frac{1}{R_1(t)}\frac{d}{dt}R_1(t)$$

$$= -\frac{1}{e^{-0.01t}}.(-0.01)e^{-0.01t}$$

$$=0.01$$

في الواقع سبق أن تعرفنا على أن معدل الإخفاق أو الفشل للتوزيع الأسي:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

هو ثابت ويساوي λ .

من ذلك نجد أن معدل الإخفاق للوحدة الثانية هو:

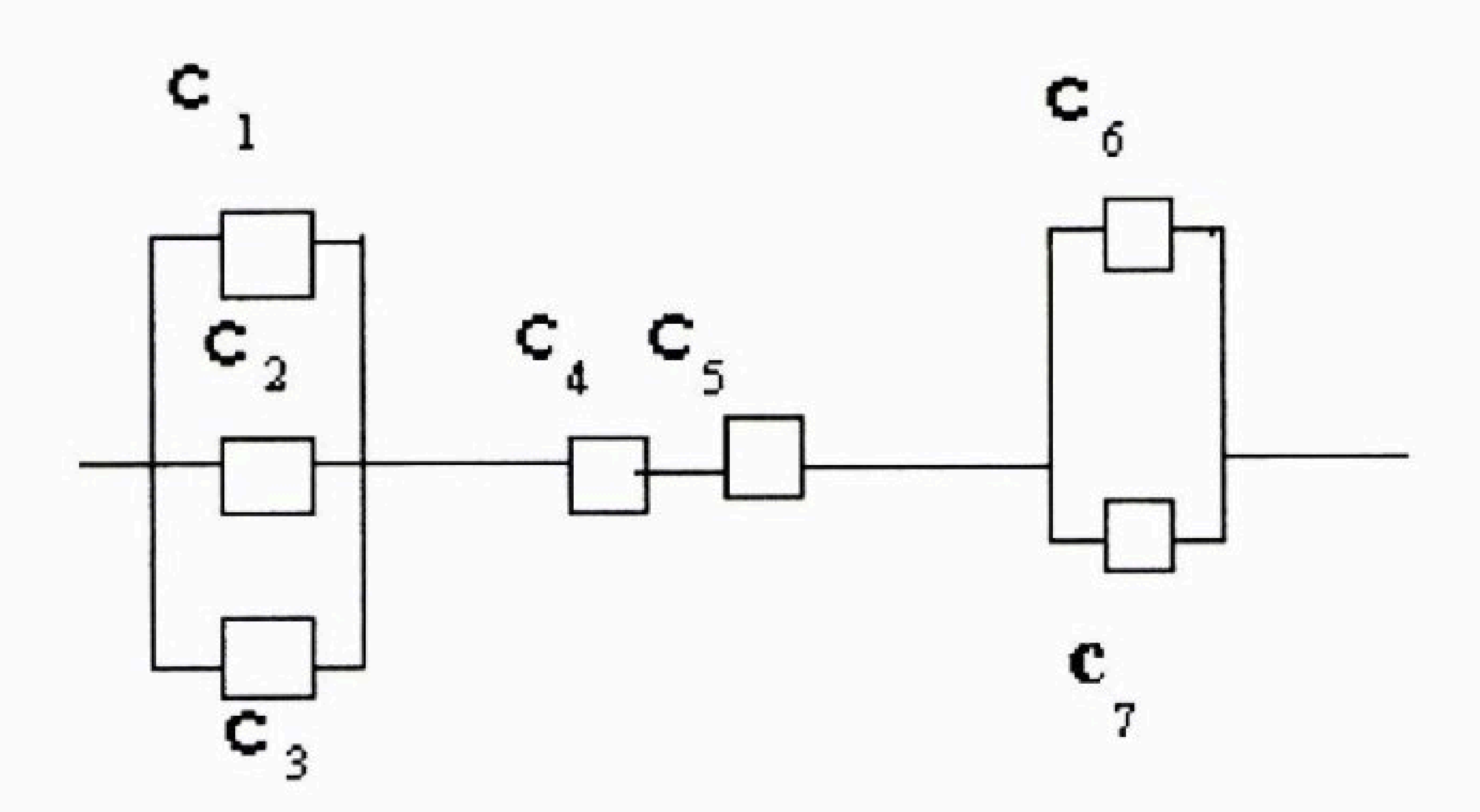
$$r_2(t) = 0.05$$

أما معدل الإخفاق للنظام المتوازي المكون من الوحدتين فهو:

$$r(t) = -\frac{1}{R(t)}\frac{d}{dt}R(t)$$

$$r(t) = -\left[e^{-0.01t} + e^{-0.05t} - e^{-0.06t} \right] . \left[-0.01e^{-0.01t} - 0.05 e^{-0.05t} + 0.06 e^{-0.06t} \right]$$

سنرى فيما يلي أننا نستطيع إيجاد مـوثـوقية بعض الأنظمة الأكثر تعقيـدا باستخدام موثوقية الأنظمـة المتسلسـلة والمتوازيـة بالرغـم من بساطتهـا. لتوضيح ذلك يمكن ملاحظة الشكل رقم (٦ , ٤ , ٨)، وأنه يمكن التعبيـر عـن النظام الكلي وكأنه ثلاثة أنظمة جزئية موصلة على التسلسل. نحسب عادة موثوقية الأنظمة الجزئية، ومن ثم نحسب موثوقية النظام الكلي الشامل لكل الوحدات.



الشكل رقم (٦ , ٤ , ٨). نظام مركب ومكون من سبع وحدات.

يمكن توزيع النظام إلى ثلاث مجموعات يكوّن كل منها نظاما جزئيّا كما يلي:

$$A = \{ c_1 , c_2 , c_3 \} , B = \{ c_4 , c_5 \} , c = \{ c_6 , c_7 \}$$

نلاحظ أن موثوقية النظام A هي:

$$R_A(t) = 1 - \prod_{i=1}^{3} (1 - R_i(t))$$

$$= 1 - [1 - R_1(x)].[1 - R_2(x)].[1 - R_3(x)]$$

وموثوقية النظام المتوازي B المتسلسل هي:

$$R_B(t) = \prod_{i=4}^{5} R_i(t)$$

$$= R_4(t) \,.\, R_5(t)$$

وأن موثوقية النظام c هي:

$$R_C(t) = 1 - \prod_{i=6}^{7} (1 - R_i(t))$$

$$= 1 - [1 - R_6(t)].[1 - R_7(t)]$$

ولكننا نعلم أن الأنظمة الجزئية A , B , C موصلة على التسلسل، ولذلك فإن موثوقيتها مجتمعة هي:

$$R(t) = R_A(t) \,.\, R_B(t) \,.\, R_C(t)$$

$$R(t) = \left\{1 - \left[1 - R_1(t)\right].\left[1 - R_2(t)\right].\left[1 - R_3(t)\right]\right\}.\left\{R_4(t).R_5(x)\right\}.\left\{\left[1 - R_6(t)\right].\left[1 - R_7(t)\right]\right\}$$

إذا فرضنا تطابق أو تماثل الوحدات في النظام السابق؛ أي أن:

$$R_i(t) = R_1(t) \quad , i = 1 , 2 \ldots , 7$$

عندئذ تكون موثوقية النظام الكلي هي:

$$R(t) = \left\{1 - \left[\ 1- R_1(t)\right]^3\right\} . \left\{R_1(t)\right\}^2 . \left\{\left[\ 1- R_6(t)\right]^2\right\}$$

٨,٥ تطبيقات على الصيانة

من أهـم تطبيقات الموثـوقيـة استخـدامـها في إيجـاد سياسة جيـدة للصيـانة (maintenance policy) ، نوضح في هذا البند بعض الحالات المباشرة في هذا السياق . إذا كان الجهاز يتكون من وحدتيـن C_1, C_2 مستقلتين عـن بعضهما ، وموثوقيتيهمـا R_1, R_2 على الترتيب ، وبغض النظر عن طريـقـة توصيلهما، فإننا نود معرفة أي الوحدتين أقصـر عـمـرًا؛ لأن ذلك يساعدنا في استخدام اعتمادات الصيانة المالية المحدودة ، في كثير من الحالات، لتوفـيـر قطعة غيار أو وحدة احتياطية .

تشتد الحاجة لمعرفة الوحدة الأقصر عمرًا في الأنظمة المتسلسلة؛ لأن طول عمر النظام هو طول عمر أضعف وحدة فيه. والآن نقدم النتيجة التالـيـة الـتـي تساعدنا في معرفة الوحدة الأقصر أو الأطول عمرًا محتملاً في أي جهاز مكون من وحدتين.

نظرية ١,٥,٨

إذا كان T_1 , T_2 متغيرين عشوائيين مستقلين غير سالبين، وكانت دالتا توزيعهما هي: F_1, F_2 ودالتي كثافتيهما f_1, f_2 ، فإن:

$$P(T_1 < T_2) = \int_0^\infty F_1(t)\, f_2(t)\, dt$$

البرهان

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين هي:

$$f(t_1, t_2) = f_1(t_1)\, f_2(t_2)$$

وذلك لأنهما مستقلتان، وبالتالي فإن الاحتمــال $P(T_1 < T_2)$ هو تكامل الدالة الكثافة المشتركة حيث إن حدود t_1 من الصفر وحتى t_2، أما حدود t_2 فمن الصفر وحتى اللا نهاية و من ذلك نجد أن:

$$P(T_1 < T_2) = \int_{t_2=0}^{\infty} \int_{t_1=0}^{t_2} f_1(t)\, f_2(t)\, dt_1\, dt_2$$

$$= \int_{t_2=0}^{\infty} [F_1(t_2) - F_1(0)]\, f_2(t_2)\, dt_2$$

$$P(T_1 < T_2) = \int_{x_2=0}^{\infty} F_1(t_2)\, f_2(t_2)\, dt_2$$

$$= \int_0^{\infty} F_1(t)\, f_2(t)\, dt$$

يمكن الحصول على صيغة مغلقة لهذا الاحتمال في بعض التوزيعات المعروفة أو البسيطة .

مثال ٨,٥,١

إذا كانت تتبع الوحدتان المستقلتان T_1 , T_2 التوزيع الأسي بمعلمتين λ_1 , λ_2 فأوجد $P(T_1 < T_2)$.

الحــل

باستخدام النظرية السابقة نكتب

$$P(T_1 < T_2) = \int_0^{\infty} F_1(t)\, f_2(t)\, dt$$

وحيث إن :

$$f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \quad , \quad f_2(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

وأن :

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t} \quad , \quad F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$$

فإن :

$$P(T_1 < T_2) = \int_0^\infty \left[1 - e^{-\lambda_1 t}\right] \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt - \int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} dt$$

$$P(T_1 < T_2) = 1 - \frac{\lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}}{-\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)} \Bigg|_0^\infty$$

$$= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

٨,٦ تماريـــــن

١- إذا كانت n وحدة موصلة على التسلسل بأطوال حياة $T_1, T_2, ..., T_n$، فأثبت أن طول حياة النظـام هـو $T = \min(T_1, T_2, ..., T_n)$، حيث T تسمى بالمتـغـيـر العشوائي لأصغر إحصاء ترتيبي.

٢- إذا كانت n وحدة موصلة على التوازي بأطوال حياة $T_1, T_2, ..., T_n$ ، فاثبت أن طول حياة النظام هـو $T = \max(T_1, T_2, ..., T_n)$ ، حيث T تسمى بالمتغـيـر العشوائي لأكبر إحصاء ترتيبي.

٣- يتبع طول حياة آلة التوزيع الأسي بمتوسط 20 ساعة.

(أ) إذا توافرت آلة واحدة وآلة احتياطية فأوجد احتمال الحصـول عـلـى مالايقل عن ٢٨ ساعة عمل.

(ب) كم عدد الآلات الاحتياطية للحصول على٢٤ ساعة عمل باحـتـمـال 0.85 ؟

٤- إذا كان الطول بالساعة لحياة جهاز يتبع توزيع وايبل بالمعلمتين $\alpha = 0.5$ ، $\lambda = 0.1$ فأوجد ما يلي:

(أ) متوسط طول حياة الجهاز وتباينه.

(ب) كم متوسط عدد الأعطال المتوقعة وتباينها في أول أربعين ساعة عمل ولخمسين جهاز؟

٥- إذا كانت T_1, T_2 متغيرين عشوائيين مستقلين ويتبعان توزيع جاما بالمعالم $\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2$ علي الترتيب ، فبرهن على أن:

$$P(T_1 < T_2) = \frac{(1-\lambda)^{n_1}}{\lambda(n_1 - 1)!} \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\lambda^i (n_1 + i - 2)!}{(i-1)!}$$

حيث إن $\lambda = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2)$

وعندما $n_1 = n_2 = 1$ فبرهن أن:

$$P(T_1 < T_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

٦- أثبت أن دالة معدل الإخفاق الاحتمالية لعدد n وحدة موصلة على التوازي هي:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(t)\ R_i(t)}{F_i(t)}$$

٧- تعمل طائرة بأربعة محركات تتبع أطوال حياتها التوزيع الأسي بمتوسط 100 ساعة عمل، إذا علمنا أن الطائرة تعمل بما لا يقل عن ثلاثة محركات، فأوجد احتمال أن تكمل الطائرة رحلة مدتها 20 ساعة.

٨- إذا كان الطول بالساعة لحياة جهاز يتبع التوزيع الاحتمالي بدالة كثافة:

$$f(t) = \frac{2}{(1+t)^3} \quad , \quad t \geq 0$$

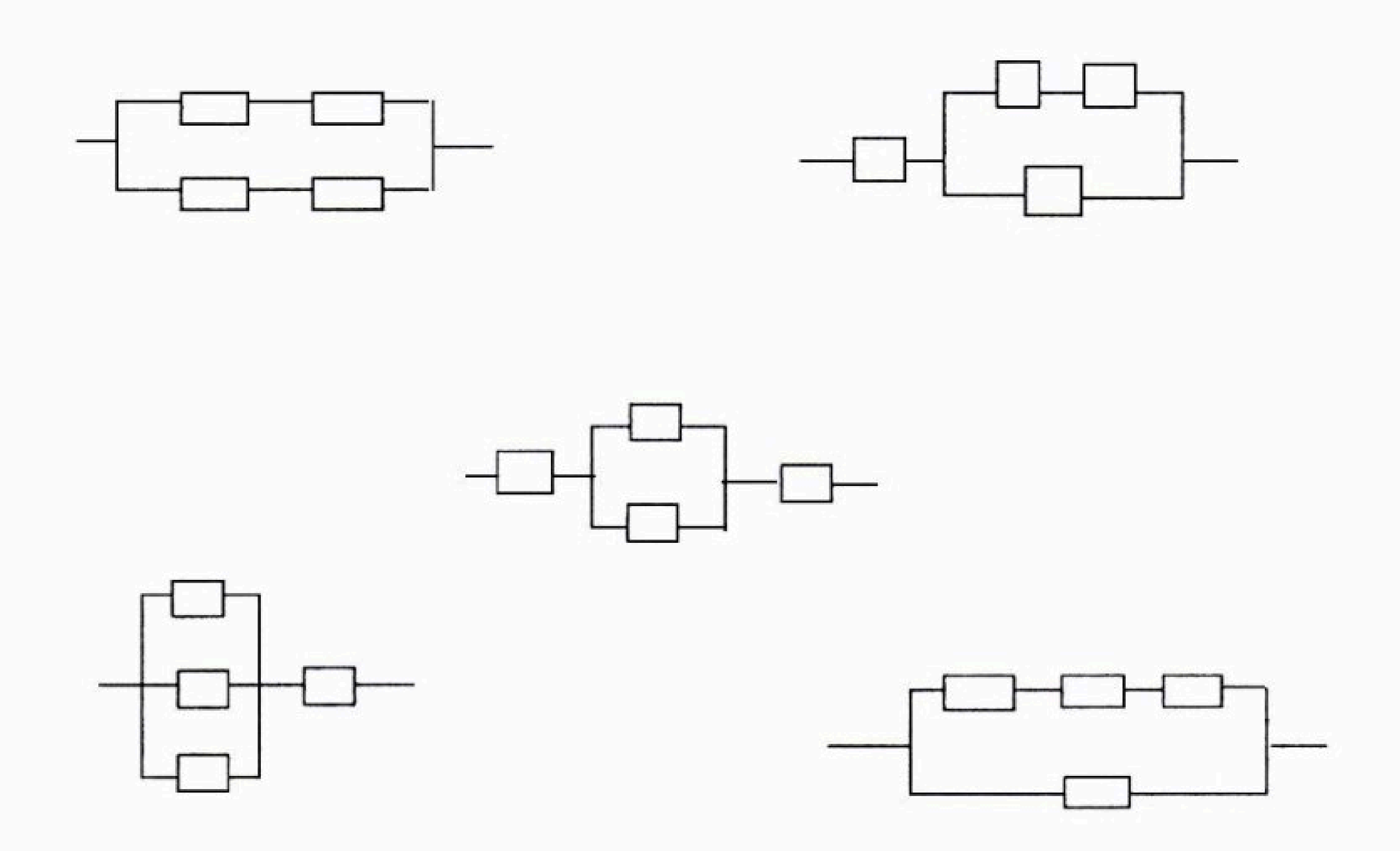
فأوجد ما يلي

(أ) دالة الموثوقية لفترة عمل ساعة واحدة.

(ب) معدل الإخفاق الاحتمالي .

(جـ) موثوقية نظام مكون من ثلاثة أجهزة مستقلة ومتصلة على التوالي.

٩- إذا كانت موثوقية أي وحدة في الأنظمة التالية هي $R(t) = 0.8$ فأي الأنظمة بالشكل رقم (٧, ٤, ٨) أفضل موثوقية. فسر إجابتك معتمدا على تصميم الأنظمة.



الشكل رقم (٧ ,٤ ,٨). نظام مركب ومكون من أربع وحدات.

١٠- عندما يبلغ الشخص في مجتمع ما ستين سنة، فإن طول حياة (زمن الإخفاق) قلبه وكبده يتبعان توزيع جاما بمتوسط عشر سنوات وبحيث تكون معلمة القلب $\alpha = 3$، ومعلمة الكبد $\alpha = 2$ إذا فرضنا أن القلب والكبد مستقلان عن بعضهما، فأوجد احتمال أن يتوقف القلب قبل الكبد.

١١- أوجد موثوقية نظام يتكون من n وحدة متماثلة ومستقلة، موثوقية كل منهما $R_i(t)$، إذا كان يعمل النظام بعمل مالا يقل عن m وحدة من الوحدات المكونة له حيث $1 \leq m \leq n$.

١٢- إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لزمن إخفاق (فشل) جهاز هي:

$$f(t) = \frac{32}{(t+4)^2} \quad , \ t \geq 0$$

حيث تقاس t بالسنوات فأوجد:

(أ) دالة الموثوقية $R(t)$

(ب) دالة الإخفاق الاحتمالي $r(t)$.

١٣- معدل الإخفاق لوحدة هو $0.7(\frac{1}{\text{سنة}})$. أوجد احتمال أن تخفق (تفشل) الوحدة خلال سنتها الثالثة من العمل . إذا استعضت الوحدة بأخرى مماثلة، فما احتمال أن نحصل على ما لا يقل عن ثلاث سنوات عمل؟

١٤- بين أن متوسط طول الحياة لنظام متواز مكون من وحدتين هو:

$$\frac{1}{\mu_1+\mu_2}+\frac{\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}+\frac{\mu_2}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}$$

عندما تتبع طول حياة الوحدة الأولى التوزيع الأسي بوسط $\frac{1}{\mu_1}$، و تتبع طول حياة الوحدة الثانية التوزيع الأسي بوسط $\frac{1}{\mu_2}$.

١٥- إذا كان معدل فشل (إخفاق) وحدة ثابت ويساوي 0.02 لكل ساعة فأجب عما يأتي:

(أ) ما احتمال أن تخفق الوحدة خلال العشر ساعات الأولى من عملها؟

(ب) إذا علمنا أن الوحدة عملت بنجاح لمدة طولها 100 فما هو احتمال أن تخفق خلال العشر ساعات التالية؟

١٦- إذا كانت دالة الكثافة لزمن إخفاق وحدة كهربية هو:

$$f(t)=\frac{32}{(t+4)^3}\quad , \ t \geq 0$$

حيث t مقيسة بالسنوات فأوجد ما يلي:

(أ) دالة الموثوقية $R(t)$.

(ب) معدل الإخفاق.

(جـ) متوسط زمن الإخفاق وهو ما يسمى متوسط الزمن للإخفاق.

١٧- دالة الموثوقية لتوزيع رايلي (Rayleigh) تعطى بالعلاقة

$$R(t) = e^{-(t/\theta)^2}$$

فأوجد ما يلي :

(أ) معدل الفشل لهذا التوزيع وادرس تزايده أو تناقصه.

(ب) متوسط الزمن للإخفاق بدلالة θ.

١٨- إذا كان معدل الإخفاق (الفشل) الثابت لجهاز كهربائي هو 5 أيام، فإذا تم فحص عشرة أجهزة في أحد الأيام، فأوجد ما يلي:

(أ) العدد المتوقع للأجهزة التي تخفق في الفحص.

(ب) احتمال أن يخفق أكثر من جهاز في الفحص.

(جـ) عدد الأجهزة التي إذا تم فحصها يكون العدد المتوقع إخفاقه من الأجهزة خمسة.

١٩- إذا كانت موثوقية جهاز قطع وفصل معدات معدنية هو:

$$R(t) = 1 - 0.2\,t^2 \qquad , 0 \le t \le 5$$

حيث تقاس t بالساعة فاحسب ما يلي:

(أ) متوسط الزمن للإخفاق.

(ب) ادرس سلوك معدل الفشل في التزايد أو التناقص.

٢٠- علم من دراسة ميدانية أن معدل مدة استخدام جهاز تليفزيون من مصنع معين هو 1.8 ساعة في اليوم. ويعطي المصنع ضمانا على أي جهاز لا يظهر الصورة بمتوسط الزمن للفشل من ألفي ساعة. إذا علمنا أن طول حياة الجهاز يتبع التوزيع الأسي، فما نسبة الأجهزة العاطلة خلال فترة الضمان؟

الفصل التاسع

أنظمة صفوف الانتظار

● مقدمة ● مكونات صفوف الانتظار ● عمليات الولادة والموت ● نموذج صف انتظار بواسوني بخادم ● نتيجة ليتل ● نموذج صف بواسوني بخادمين ● تمارين

٩,١ مقدمــــة

تعتبر دراسة صفوف الانتظــار (queues) من تطبيقات نظرية الاحتمالات المهــمــة لاستخدامات نماذجها في مجالات متعددة في الحياة اليومية والاستخدامات العملية. وتزداد أهمية تطبيق نماذج صفوف الانتظار عند محدودية الموارد والرغبة في المنافسة والحصول على نتائج أفضل بأقل تكاليف، ولذا يمكن اعتبارهــا نــوعًا من طرق الأمثلية في اتخاذ القرار.

تظهر صفوف الانتظار في كثير من المجالات؛ فمثلا نجد صفًا من الطلاب المتقدمين للالتحاق بالجامعة واستكمال أوراقهم في عمادة القبول، أو نجدهم فــي صف لتسجيل المقررات التي يرغبون في دراستها، ونجدهم في صف انتظار لاستلام النتائج. وقد يكوِّنون صــفًا في مطعم الجامعة. وهناك صفوف انتظار مكونة مــن مرضى في انتظار دورهم لمقابلة الطبيــب، أو تكون مكونة من زبائن في الســوق المركزية لتسديد حسابات مشترواتهم، كما تكون هناك صفوف مكونة مــن آلات تنتظر الصيانة الدورية أو الإصلاح التي يقوم بها مهندس أو عدد مــحــدود مــن

المهندسين، وربما يكون في صف الانتظار أعمال يضعها الحاسب الآلي في صف الانتظار لإنجازها.

تهتم البنوك بمراقبة صفوف الانتظار لتنافس غيرها من البنوك، وذلك بتقديم خدمة أسرع مع مدة انتظار أقل ما يمكن، وقد يكون الموضوع في الصف أدوية موجودة في الصيدلية تنتظر من يشتريها، أوسلعة محدودة العمر؛ مثل المواد الغذائية المعلبة أو المحفوظة بطرق التجفيف مثلاً.

٢,٩ مكونات صف الانتظار

يتكون نظام صف الانتظار (queueing-system) من محطة أو مركز خدمة (service station) وقد يكون بها شخص أو آلة تقوم بالخدمة (server)، كما يوجد في كل صف أشخاص أو وحدات تبحث أو تنتظر الخدمة تسمى الزبائن (customers)، وتسمى الوحدات الملحقة بصف الخدمة الوصول (arrivals)، أما الوحدات الخارجة فيشار إليها بالرحيل (departure).

ولدراسة أي صف يجب معرفة ما يلي :

١- **الوصول** : ويشمل توزيع الزمن بين وصول وآخر، وعدد الواصلين في كل لحظة فيما إذا كانوا فرادى أو مجموعات أو دفعات، وحجم مصدر الزبائن إن كان لانهائيًا أو محدودًا.

٢- **الخدمة** : تشمل التوزيع الاحتمالي لزمن الخدمة، وعدد الخدم، وعدد المخدومين إن كانوا يزيدون على زبون واحد.

٣- **سلوك الخدمة** : توجد عدة أمور لاختيار الزبون أو دخوله مركز الخدمة؛ فقد تكون الخدمة حسب ترتيب الوصول. كما قد تكون حسب عكس ترتيب الوصول، أي من يصل أخيرا يخدم أولاً، وقد تكون الخدمة حسب أسبقية محددة تعتمد على أهمية الزبون أوطبيعة الخدمة؛ مثل الخدمة في الطوارئ في المستشفيات تكون حسب حالة المريض، كما قد يكون سلوك الخدمة عشوائيًا لا تتبع ترتيبًا محددًا.

٤- **سعة مكان الانتظـار:** قد لا يكون هناك مكان للانتظار، أو يـكـون الانتظار محددًا بسعة ما، أو قد تكون سعة الانتظار لا نهائية.

٥- **سلوك الزبون:** قد لا يحبذ الزبون الالتحاق بصف الانتظار ويفضل المغادرة برغبته في حالة إذا ما كان الانتظار ممكنا، وذلك بسبـب طـول صـف الانتظار مثلاً ويسمى ممتنـعًا (balking). أو يلتحق ومن ثم يغادر الصف لشعـوره بطول وقت الانتظار ويسمى هـروبًا (reneging) أو قد ينتقل الزبون إلـى صـف انتظار يقدم الخدمة نفسها في نظام صف الانتظار ويسمى تذبذب (jocking).

اعتاد الدارسون والباحثون في صفوف الانتظار استخدام الرموز التالـيـة لتحديد نموذج صف الانتظار a/b/c/d/e

حيث إن:

a ترمز لتوزيع عدد الواصلين أو زمن ما بين الوصول.

b ترمز لتوزيع زمن الخدمة.

c ترمز لعدد الخدم في النظام.

d ترمزلسعة مكان الانتظار، وإذا لم تحدد فيدل ذلك على أنها لا نهائية.

e ترمز لمصدر الزبائن وكذلك فإن عدم تحديدها يدل على أن المصدر غير محدود.

٣,٩ عمليات الولادة والموت

تم استخدام عملية الولادة والموت (birth - death process) للتدليل على عدد الوحدات المخزنة وما يضـــاف إليها هو ولادة وما يصرف منها هو موت. كما قد تكـون الولادة هي القادم (arrival) في صف الانتظار، بينما الموت هو الراحـل (departure)، وبالتالي فالمصطلح معنوي أكثر من كونه تمثيلاً أو تعبيراً عن واقع، كذلك إذا كنا ندرس مجتمـعًا بكتيريًا فيكون الانقسام ولادة والفناء أو الفـقـدان موتًا، وقد يكون المجتمع هو سكان مدينة أو مجتمعًا ما.

يجب أن تحكم عملية الولادة والموت أربع فرضيات أساسية، وذلك بفرض أن حجم المجتمع في الفترة $(t,t+\delta t)$ هي κ، نوردها فيما يلي:

(b_1) احتمال عدم حصول ولادة في الفترة $(t,t+\delta t)$ هو :

$$P_{k,k}(t+\delta t) = 1 - \lambda_{\kappa}\,\delta t + 0\,(\delta t)$$

(b_2) احتمال حصول ولادة في الفترة $(t,t+\delta t)$ هو :

$$P_{k,k+1}(t+\delta t) = \lambda_{\kappa}\,\delta t + 0\,(\delta t)$$

وبالمثل يمكن كتابة

(d_1) احتمال عدم حصول وفاة في الفترة $(t,t+\delta t)$ هو

$$P_{k,k}(t+\delta t) = 1 - \mu_{\kappa}\,\delta t + 0\,(\delta t)$$

(b_2) احتمال حصول وفاة في الفترة $(t,t+\delta t)$ هو :

$$P_{k,k-1}(t+\delta t) = \lambda_{\kappa}\,\delta t + 0\,(\delta t)$$

من قاعدة أن مجموع الاحتمالات يساوي الوحدة نحصل على النتيجتين التاليتين

(b_3) احتمال حصول ولادتين أو أكثر خلال الفترة $(t,t+\delta t)$ هو :

$$P_{k,k+i}(t+\delta t) = 1 - P_{k,k+1}(t+\delta t) - P_{k,k}(t+\delta t) = 0\,(\delta t)$$

حيث $i = 2, 3, \ldots$

وكذلك نجد أن :

(d_3) احتمال حصول وفاتين أو أكثر خلال الفترة $(t,t+\delta t)$ هو :

$$P_{k,k-i}(t+\delta t) = 1 - P_{k,k-1}(t+\delta t) - P_{k,k}(t+\delta t) = 0\,(\delta t)$$

حيث $i = 2, 3, \ldots$

ولدراسة هذا النوع من العمليات نحاول تكوين العلاقات أو المعادلات الرياضية التي تحكم السلوك للعملية بحالتها العامة، ومن ثم حصر الحالات الخاصة ضمن قيود معقولة وقابلة للتطبيق.

المقدار $0(\delta t)$ كثيرة حدود تحتوي على الحد δt بالقوة الثانية، أي $(\delta t)^2$ أو أكثر، ومن ذلك نلاحظ أنه :

إذا كان $P_k(t+\delta t)$ هو احتمال أن يكون في المجتمع أو في صف الانتـظـار k شخص في الفترة $(t+\delta t)$، وهذا يتكون من مجموع الاحتمالات الآتية:

(أ) يوجد عدد k في المجتمع أو الصف في الـزمـن t وعدم قدوم أي شخص أو خدمة أي شخص خلال الفترة القصيرة δt.

(ب) يوجد عدد $k-1$ في المجتمع أو الصف في الزمن t وقدوم شخص واحد خلال الفترة القصيرة δt.

(جـ) يوجد عدد $k+1$ في المجتمع أو الصف في الزمن t ورحيل شخص واحد خلال الفترة القصيرة δt.

(د) يوجد عدد $k-i$ أو $k+i$ حيث $i \geq 2$ في المجتمع أو الصف في الزمن t مع قدوم شخصين أو أكثر أو رحيل شخصين أو أكثر خلال الفترة القصيرة δt. ونعلم أن احتمال الفقرة الأخيـرة (د) هـو $O(\delta t)$ وهي حدود يمكن إهمالها كمـا سنرى فيما بعد.

لتكوين النموذج الذي يحكم هذه العملية نكتب:

$$\begin{aligned} P_k(t+\delta t) = & P_k(t)\,[1-\lambda\,\delta t+o(\delta t)]\,.\,[1-\mu\,\delta t+0(\delta t)] \\ & +P_{k-1}(t)\,[\lambda\,\delta t+o(\delta t)]\,.\,[1-\mu\,\delta t+0(\delta t)] \\ & +P_{k+1}(t)\,[\mu\,\delta t+o(\delta t)]\,.\,[1-\lambda\,\delta t+0(\delta t)] \\ & +[\qquad\qquad]\,.0(\delta t) \end{aligned}$$

بالتبسيط ونقل $P_k(t)$ إلى الطرف الأيمن والتقسيم على δt نحصل على:

$$\frac{P_k(t+\delta t)-P_k(t)}{\delta t} = -(\lambda+\mu)\,P_k(t)+\lambda\,P_{k-1}(t)+\mu\,P_{k+1}+\{\quad\}0(\delta t)$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما δt تؤول الى الصفر نحصل على:

$$P'_k(t) = -\left(\lambda_\kappa+\mu_k\right)P_k(t)+\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)+\mu_{k+1}P_{k+1}(t)\ ,\ k\geq 0$$

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

وذلك لعدم إمكانية رحيل أحد عندما يوجد الصفر، وهو عدد الأشخاص في النظام، ولأن $P_{-1}(t) = 0$

أي لا يمكن أن يكون عدد الزبائن في الصف سالبًا، ولقيم K الأخرى نكتب:

$$P'_k(t) = -\left(\lambda_\kappa + \mu_k\right) P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t) \ , k \geq 1$$

يقال للمعادلتين السابقتين لقيم k=0، $k \geq 1$ المعادلات الفرقية التفاضلية (differential - difference equation). لحل مجموعة المعادلتين السابقتين نحصر أنفسنا عندما تؤول t إلى مالا نهاية، أي ندرس المجتمع أو صف الانتظار في حالة الاستقرار (stationary state) التي لا يعتمد عدد الأشخاص في الصف فيها على الزمن t فيكون:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} P_k(t) = P_k$$

$$\frac{d}{dt} \lim_{t \longrightarrow \infty} P_k(t) = 0$$

بالتعويض في المعادلات السابقة نحصل على:

$$0 = -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1$$

$$0 = -\left(\lambda_\kappa + \mu_k\right) P_k + \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} \ , k \geq 1$$

والصفان الأخيران معادلتان فروقيتان (وغير تفاضليتين)، ويمكن حلهما باستخدام الاستقراء الرياضي (mathematical induction) حيث نلاحظ أنه لقيم $k = 0$ يكون:

$$P_1 = \left(\lambda_0 / \mu_1\right) P_0$$

ومن ذلك نجد أنه لقيم $k = 1$ فإن:

$$0 = -\left(\lambda_1 + \mu_1\right) \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right) P_0 + \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$$

ومن ذلك يكون:

$$P_2 = \left(\lambda_1 \lambda_0 / \mu_2 \mu_1\right) P_0$$

ولقيم $k = n - 1$ فإن:

$$P_{n-1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n-1}} P_0$$

نعوض عن قيم $k = n$ وكذلك عن قيمة P_{n-1} السابقة فنحصل على:

$$0 = -\left(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}\right)\left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}\right) P_0 + \lambda_{n-1}\left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-2}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n-1}}\right) P_0 + \mu_{k+1} P_{k+1}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$P_{n+1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n+1}} P_0$$

أي أن:

$$P_k = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda_{i-1} / \mu_i\right) P_0$$

ولكننا نعلم أن:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

ومن ذلك نجد أن:

$$P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1$$

ومن ذلك نجد أن:

$$P_0 + P_0 \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) = 1$$

أي أن احتمال أن يكون صف الانتظار فارغًا هو:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) \right]^{-1}$$

يجب ملاحظة أنه يمكن حل الحالات الخاصة للمعادلات الفروقية التفاضليـة وذلك عند دراسة حالة الولادة القـدوم البحتـة (pure birth) أو حالة الوفاة أو الرحيـل البحتة (pure death) .

باستخـدام حل المعـادلات التفاضلية من الدرجة الأولى، أو استخدام معامل التكامل (integrating factor) لن نقوم بدراسة هاتين الحالتين وإنما نتركهما للقارئ المتمرس، أما الحالة غير الاستقرارية العامة؛ أي إيجاد $P_k(t)$ فيصعب التعامل معها في مستوى كتابنا الحالي.

٤ ,٩ نموذج صف انتظار بواسوني بخادم

نقصد بهذا النموذج صف الانتظار البسيط M/M/1 ؛ أي أن عدد القادمين يتبع توزيع بواسون بمعدل λ وزمن الانتظار يتبع التوزيع الأسي بمعـدل μ، ومن ذلك يكون لدينا:

$$\lambda_k = \lambda \qquad ، k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_k = \mu \qquad ، k = 1, 2, \ldots$$

وبالتالي فإن عدد الزبائن في صف الانتظار يكون k باحتمال:

$$P_k = \prod_{i=1}^{k} \left(\lambda_{i-1}/\mu_i\right) P_0$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \left(\lambda/\mu\right)^k P_0 \qquad , \qquad k = 0, 1, \ldots$$

ولحساب P_0 نستخدم العلاقة:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\right]^{-1}$$

فيكون لدينا:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) k\right]^{-1}$$

وبالتالي فإن:

$$= \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}\right]^{-1}$$

$$= \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right)$$

وبالتالي فإن:

$$P_k = \left[1 - (\lambda/\mu)\right](\lambda/\mu)^k \qquad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

وهو احتمال وجود k شخص في صف الانتظار. نلاحظ أننا استخدمنا فرض:

$$\lambda < \mu \qquad \text{أو} \qquad \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

ليكون النظام مستقراً، ويكون للمتتابعة الهندسية مجموع محدود، وتسمي النسبة $\frac{\lambda}{\mu}$ بشدة كثافة المرور (traffic intensity) ويرمز لها بالرمز ρ فيكون:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

وبذلك نكتب:

$$P_k = \left[1 - \rho\right]\rho^k \qquad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

وهذا هو التوزيع الهندسي الذي سبق لنا دراسته في الفصل السادس.

يمكن حساب متوسط عدد الزبائن في صف الانتظار، ويرمز له بالرمز L كما يلي:

$$L = E(k)$$

$$= \sum_{k=j}^{\infty} k P_k$$

$$= \sum_{k=j}^{\infty} k (1 - \rho)\rho^k$$

$$= (1 - \rho)\sum_{k=j}^{\infty} k \rho^k$$

$$= (1-\rho)\rho \sum_{k=j}^{\infty} k\,\rho^{k-1}$$

$$= (1-\rho)\rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^{k}$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k}$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right)$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{1}{(1-\rho)^{2}}$$

$$= \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

والآن يمكننا حساب المقادير المميزة لصف الانتظار مثل متوسط عدد الزبائن في النظام، ومتوسط عددهم في الانتظار أو احتمال أن يكون الصف خـالـيًا أو احتمال ألا يوجد من ينتظر.

(أ) متوسط عدد الزبائن في النظام : المتوسط لهذا التوزيع من ملاحظة الدالة المولدة للعزوم هي:

$$G(s) = E(s^{k})$$
$$= \sum s^{k} P_{k}$$
$$= \sum s^{k} (1-\rho)\, \rho^{k}$$
$$= (1-\rho) \sum (s\rho)^{k}$$

$$= \frac{\rho}{(1 - S\rho)}$$

وبالتالي فإن المتوسط هو:

$$G'(1) = \frac{(1 - \rho)\, \rho}{(1 - S\rho)^2} \Bigg|_{S = 1}$$
$$= \frac{\rho}{(1 - \rho)}$$

(ب) متوسط عدد الزبائن في الانتظار: أما متوسط عدد الزبائن في الانتظار (queueing) باستبعاد الشخص الذي في الخدمة، ويرمز له بالرمز L_q فيحسب كما يلي:

$$L = E(k - 1)$$

$$= \sum_{k=j}^{\infty} (k - 1)\, P_{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k}$$

$$= L\ (1 - P_{0})$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

$$= \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

لاحظ من حساب L_q bL أن : $L = L_q + \rho$

(جـ) احتمال ألايوجد من ينتظر: المقصود بذلك احتمال أن يكون صف الانتظار إما خاليًا p_0 أو يوجد زبون واحد فقط p_1 ؛ أي أن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(\text{لايوجد من ينتظر}) = p_0 + p_1$$

$$= (1-\rho) + (1-\rho)\rho$$

$$= (1-\rho)(1+\rho)$$

$$= 1-\rho^2$$

(د) احتمال ألايقل عدد الزبائن عن r شخص: هذا الاحتمال يعني إما احتمال عدد الزبائن في النظام لايقل عن r شخص أي أن:

$$P(\text{لايقل الزبائن في النظام عن } r \text{ شخص}) = \sum_{k=r}^{\infty} p_k$$

$$= \sum_{k=r}^{\infty} (1-\rho)\rho^k$$

$$= (1-\rho)\sum_{k=r}^{\infty} \rho^k$$

$$= (1-\rho) \cdot \frac{\rho^k}{1-\rho}$$

$$= \rho^k$$

أو احتمال ألا يقل عدد المنتظرين عن r شخص؛ حيث $r \geq 1$ وهذا يحسب كما يلي:

$$P(\text{لايقل عدد المنتظرين عن r شخص}) = \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k$$

$$= p^{r+1}$$

٩,٥ نتيجة ليتل

أكد هذه النتيجة ليتل (J. D. C. Little) بالبرهان وذلك في بحث نشره في مجلة «بحوث العمليات» عام ١٩٦١م بعنوان «برهان علاقة في صفوف الانتظار $L = \lambda W$»، ولذلك نسبت إليه مع أنها قديمة جداً.

لنفرض أن λ معدل وصول الزبائن، وأن W متوسط زمن النظام (system time) ويقصد به متوسط الزمن الذي يقضيه الزبون في الانتظار والخدمة معًا، وقد يشار إليه على أنه متوسط زمن صف الانتظار ويختلف عن متوسط زمن الانتظار في النظام (queueing time).

تنص نتيجة ليتل على أن متوسط عدد الزبائن في صف الانتظار (أو النظام) يساوي حاصل ضرب معدل (أو متوسط) وصول الزبائن للنظام في متوسط الزمن الذي يقضيه الزبون في النظام، أي أن:

$$L = \lambda W$$

حيث تعريف ذلك في الفصل (٩,٤) السابق.

والبرهان البدهي لنتيجة ليتل يعتمد على ملاحظة أن يجد زبون عند التحاقه بالنظام العدد نفسه من الزبائن عند إتمام خدمته ومغادرته للنظام. وهذا العدد هو L متوسط عدد الزبائن في النظام. وعند مغادرته يكون عدد الزبائن الملتحقين بالنظام خلال انتظاره وخدمته يساويλT إذا كان قد قضى وقتًا في النظام يساوي T وحدة زمن؛ أي أن النتيجة صحيحة.

لو أردنا حساب زمن الانتظار فقط، فإنه بالطريقة نفسها يمكن الوصول إلى أن:

$$L_q = \lambda W_q$$

حيث L_q متوسط عدد المنتظرين و W_q متوسط زمن الانتظار.

مثال ١,٥,٩

استخدم نتيجة ليتل لإيجاد مايلي:

(أ) متوسط زمن النظام W.

(ب) متوسط زمن الانتظار W_q.

وذلك في نظام الصف $M/M/1$ المعروض في البند السابق.

الحـل

(أ) وجدنا في البند السابق أن:

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

وبالتعويض في نتيجة ليتل فإن متوسط زمن النظام يحسب كما يلي:

$$L = \lambda W$$

ومن ذلك يكون:

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\lambda} \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

(ب) كما وجدنا في البند السابق كذلك أن متوسط طول صف الانتظـار هو:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

ومن ذلك يمكن حساب W_q بالعلاقة التالية:

$$L_q = \lambda W_q$$

وبالتعويض عن قيمة L_q نجد أن:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot L_q$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(\lambda/\mu)^2}{1-\lambda/\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu(\mu-\lambda)}$$

٦ , ٩ نموذج صف انتظار بواسوني بخادمين

ندرس هذه الحالة كتطبيق إضافي أو تحديد لنموذج صف الانتظار في البند (٩ , ٤). يرمز لهذا النموذج بالرمز *M/M/2* ؛ حيث يصل الزبائن بمعدل λ وفقًا لتوزيع بواسون، ويقوم بخدمتهم أحد خادمين يتبع كل منهما التوزيع الأسي بمعدل μ ؛ أي بمتوسط أسي مقداره $\frac{1}{\mu}$. يسير العمل في صف الانتظار عندما يصل زبون يلتحق بأي من الخادمين إذا كانا عاطلين (غير مشغولين) أو يلتحق بأحدهما إذا كان الآخر مشغولاً، أو ينتظر إذا كان كل منهما مشغولاً بخدمة زبون آخر ليلتحق بالخدمة فور شغور مركز الخدمة. من الفرضية السابقة نجد أن:

$$\lambda_k = \lambda \qquad , \; k = 0, 1, \ldots$$

$$\mu_k = \begin{cases} \mu \;, & k = 1 \\ 2\mu \;, & k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

وبالتالي فإن الاحتمال المستقر (steady) لوجود k شخص أو زبون في صف الانتظار هو:

$$p_k = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0$$

ومن ذلك نجد أن:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0$$

وأن:

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu \,.\, 2\mu} \cdot p_0 = \left(\frac{\lambda^2}{2\mu^2} \right) p_0$$

وكذلك:

$$p_k = \frac{\lambda^k}{2^{k-1}\,\mu^k} \cdot p_0 \qquad k \geq 2$$

$$= 2 \left(\frac{\lambda}{2\mu} \right)^k p_0$$

$$= 2 \left(\frac{\rho}{2} \right)^k p_0$$

حيث $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ هي كثافة الحركة.

نلاحظ كذلك أن $\sum p_k = 1$ وبفرض أن $\left(\frac{\rho}{2}\right) < 1$ يعطي أن:

$$\begin{aligned} p_0 &= \left\{1 + 2\left[\frac{\rho}{2} + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \ldots\right]\right\}^{-1} \\ &= \left\{1 + 2 \cdot \frac{\rho/2}{1 - (\rho/2)}\right\}^{-1} \\ &= \left(\frac{2+\rho}{2-\rho}\right)^{-1} \\ &= \frac{2-\rho}{2+\rho} \end{aligned}$$

وهذا هو احتمال أن يكون نموذج صف الانتظار فـارغًا أو$P(k = 0)$، ومن ذلك يكون احتمال أن يوجد k شخص في النظام هو:

$$P_k = (2)\left(\frac{2-\rho}{2+\rho}\right)\left(\frac{\rho}{2}\right)^k \quad , \quad k \geq 1$$

ومن ذلك يمكن حساب بعض معالم صف الانتظار (أو ما يشار إليـهـا أحـيـانًا بمقاييس الكفاءة (measures of effectiveness).

متوسط الزبائن في نموذج صف الانتظار هو:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k$$

$$= 2\left(\frac{2-\rho}{2+\rho}\right)\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\rho}{2}\right)^k$$

$$= 2 \cdot \frac{2-\rho}{2+\rho} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \frac{d}{d\rho/2} \cdot \sum\left(\frac{\rho}{2}\right)^k$$

$$= 2 \cdot \frac{2-\rho}{2+\rho} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \frac{1}{1-(\rho/2)^2}$$

يمكن كذلك حساب متوسط الزبائن المنتظرين كما يلي:

$$L_q = \sum_{k=2}^{\infty} (k-2)\, p_k$$

$$= 2\left(\frac{2-\rho}{2+\rho}\right)\sum(k-2)\left(\frac{\rho}{2}\right)^k$$

$$= 2\left(\frac{2-\rho}{2+\rho}\right)\left(\frac{\rho}{2}\right)^3\sum(k-2)\left(\frac{\rho}{2}\right)^{k-3}$$

$$= 2\left(\frac{2-\rho}{2+\rho}\right)\left(\frac{\rho}{2}\right)^3\frac{d^2}{d(\rho/2)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^k$$

وبالتبسيط نحصل على:

$$L_q = \frac{4\rho}{4-\rho^2}$$

ولكن يمكن كتابة الصيغة الأخيرة كما يلي:

$$L_q = \frac{\rho^3}{4 - \rho^2}$$

$$= \frac{4\rho}{4 - \rho^2} - \rho$$

وبذلك نستنتج أنه في نظام صف انتظار *M/M/2* يكون:

$$L = L_q + \rho$$

وهي العلاقة التي لاحظنا تحققها في نظام *M/M/1*.
يمكن حساب زمن الانتظار للزبون في صف الانتظـار *M/M/2* باستخدام علاقة ليتل وهي:

$$L_q = \lambda W_q$$

ومن ذلك نجد أن:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} . L_q$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{\rho^3}{4 - \rho^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda^2}{4\mu^2 - \lambda^2}\right)$$

أما متوسط زمن النظام فهو:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{4\mu}{4\mu^2 - \lambda^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{4}{4-\rho}\right)$$

٩,٧ تمـــاريـن

١- تصل سيارات إلى محطة التزود بالوقود تبعا لتوزيع بواسـون وبمـعـدل فـي الساعة، وتستغرق خدمة السيارة الواحدة خمس دقائق في المتوسط، ويتبع التوزيع الأسي علما بأنه توجد مضخة واحدة فقط لتعبئة الوقود. أوجد ما يلي:

(أ) احتمال أن تكون المحطة فارغة بدون سيارات.

(ب) احتمال وجود 15 سيارة أو أقل في المحطة.

(جـ) احتمال ألا تقل السيارات في المحطة عن خمس.

(د) متوسط عدد السيارات في المحطة.

(هـ) متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في المحطة.

٢- تبين أنه في أحد ورش كلية العلوم تصل الأجهزة العاطلة بمعدل 12 جهازًا في اليوم (خلال ثماني ساعات)، وذلك تبعـاً لتوزيع بواسون. إذا كان متوسط زمن الخدمة، والذي يتبع التوزيع الأسي، لإصلاح الجهاز يساوي عشرين دقيقة، ويوجد فني واحد للإصلاح في هذه الورشة.

(أ) أوجد احتمال أن يكون الفني عاطلا عن العمل.

(ب) احسب احتمال ألا يوجد أكثر من ثلاثة أجهزة على الأكثر.

(جـ) احسب متوسط عدد الأجهزة في الورشة.

(د) أوجد متوسط المدة التي يحتاج إليها الجهاز في الورشة حتى إتمام إصلاحه.

٣- إذا زودت الكلية الورشة بفني آخر له نفس قدرة الفني الأول وكفاءته ويعمل في الإصلاح بالتوزيع الأسي وبالمعدل نفسه، فأوجد ما يلي:

(أ) احتمال أن يكون الفنيان عاطلين.

(ب) احتمال أن يكون أحد الفنيين عاطلا.

(جـ) احتمال أن يوجد في الورشة ثلاثة أجهزة على الأكثر.

(د) إحسب متوسط عدد الأجهزة الموجودة في الورشة.

(هـ) أوجد متوسط المدة التي يحتاج إليها الجهاز في الورشة.

٤- يتبع الزمن الذي يستغرقه موظف القبول في الجامعة للتأكد من استكمال الطالب أوراقه التوزيع الأسي بمعدل ثلاث دقائق للطالب، فإذا لوحظ أن حضور الطلاب للعمادة يتبع توزيع بواسون بمتوسط 15 طالبًا في الساعة، فأوجد ما يلي:

(أ) احتمال أن يكون الموظف مشغول.

(ب) احتمال ألا يوجد أكثر من خمسة طلاب في صف الانتظار.

(جـ) متوسط عدد الطلاب في صف الانتظار.

(د) متوسط زمن انتظار الطالب عند تقديمه الأوراق.

٥- يوجد في أحد الفنادق بدالة (سنترال) آلية لنقل مكالمات زبائن الفندق إلى الخارج. يتبع عدد المكالمات توزيع بواسون بمتوسط λ، بينما يتبع زمن المكالمة التوزيع الأسي بالمعلمة μ، وبفرض أنه يوجد عدد خطوط كافية في البدالة. أثبت أن p_k احتمال انشغال k خط في البدالة يتبع توزيع بواسون بالصيغة:

$$p_k = e^{-\lambda/\mu}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

٦- يوجد في إحدى كليات الجامعة موقف يتسع لخمسين سيارة. تصل السيارات حسب توزيع بواسون بمعدل سيارة في الساعة. يتبع مدة وقوف السيارة التوزيع

الأسي بمتوسط ساعة ونصف. أوجد :

(أ) احتمال أن يكون الموقف فارغا.

(ب) احتمال أن يكن الموقف مليئاً بالسيارات.

(جـ) احتمال ألا تجد سيارة قادمة سوى مكان واحد في الموقف.

(د) احتمال ألا يزيد عدد السيارات عن نصف عدد المواقف.

(هـ) احتمال أن تصل سيارة ولاتجد مكانا بالموقف.

٧- يوجد في مكتبة الجامعة موظفان لاستكمال إجراءات إعارة الكتب للطلاب، فإذا كان معدل وصول الطلاب إلى قسم الإعارة يتبع توزيع بواسون بمعدل 25 طالبًا في الساعة، وكان زمن إنهاء إجراءات الإعارة يتبع التوزيع الأسي بمتوسط دقيقتين للطالب، فأوجد ما يلي:

(أ) نسبة الوقت الذي يكون فيه الموظفان عاطلين.

(ب) احتمال أن يكون أحد الموظفين عاطلاً.

(جـ) احتمال أن ينتظم في صف الانتظار طالب يريد الإعارة.

(د) متوسط عدد الطلاب في قسم الإعارة.

(هـ) متوسط زمن بقاء الطالب في قسم الإعارة.

٨- لدينا صف انتظار بوصول بواسوني وخدمة أسية وبخادم، حيث إن معدل الوصول هو $\lambda_k = (k+2)\,\lambda$، ومعدل الخدمة الأسية $\mu_k = k\mu$ لقيم $k = 0, 1, 2, \ldots$.

المطلوب إيجاد احتمال وجود k زبون في نظام صف الانتظار بدلالة $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ بفرض أن $\rho < 1$، أوجد كذلك متوسط عدد الزبائن في نظام صف الانتظار.

٩- أوجد p_k، احتمال أن يوجد k زبون، في نظام صف الانتظار البواسوني بعدد s خادم، أي $M/M/s$ حيث $s < \infty$. وأثبت أن $L = L_q + \rho$.

١٠- إذا كانت المعادلات الفرقية التفاضلية للنموذج الانتقالي لعملية ولادة بحتة هي:

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda\, P_0(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_k(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t), \quad k \geq 1$$

أوجد$P_k(t)$، احتمال أن يوجد k زبون في نظام صف الانتظار في الزمن t إذا علمنا أن $P_k(0) = 0$ لقيم $k = 0$ وأن $P_0(0) = 1$.

١١- استخدم المعادلات الفرقية التفاضلية لعمليات الولادة والموت لنكتب المعادلات الفرقية التفاضلية لعملية الموت البحتة إذا كان يوجد في نظام صف الانتظار N زبون عند بداية عمل النظام؛ أي أن $P_N(0) = 1$، ثم أوجد قيمة $P_k(t)$ لقيم $k = 0, 1, ..., N$.

١٢- إذا كان لدينا صف انتظار بواسوني بعدد لانهائي من الخدم أو بخادم متجاوب (أي يضاعف خدمته بعدد الزبائن الموجودين في نظام صف الانتظار) أي نظام $M/M/\infty$.

بفرض أن معدل الوصول $\lambda_k = \lambda$ لقيم $k = 1, 2, ...$.

ومعدل الخدمة $\mu_k = k\mu$ لقيم $k = 1, 2, ...$.

أوجد كلا من :

(أ) p_0 احتمال أن يكون نظام صف الانتظار فارغا.

(ب) p_n احتمال وجود زبون في النظام.

(جـ) L متوسط عدد الزبائن في النظام.

المراجـــع

أولاً: المراجع العربية

أبو صالح، محمد صبحي وعوض، عدنان محمد (١٩٨٣م) مقدمة في الإحصاء: دارجون وايلي وأبنائه.

أبو عمة، عبدالرحمن محمد؛ عبدالله، أنور أحمد؛ هندي، محمود إبراهيم (١٩٩٠م) الإحصاء التطبيقي؛ الطبعة الأولى، عمادة شؤون المكتبات، جامعة الملك سعود، الرياض.

أبو عمة، عبدالرحمن محمد، أحمد، عبدالهادي نبيه (١٤١٦هـ) ترجمة النظرية الإحصائية للموثوقية واختبارات الحياة. تأليف إدوارد بارلو وفرانك بروشان. عمادة شؤون المكتبات، جامعة الملك سعود، الرياض.

أبو عمة، عبدالرحمن محمد، (١٤١٧هـ) نظرية صفوف الانتظار وتطبيقاتها. تحت النشر.

بري، عدنان ماجد؛ هندي، محمود إبراهيم؛ وعبدالله، أنور أحمد (١٩٩١م) مبادىء الإحصاء والاحتمالات، الطبعة الأولى، عمادة شؤون المكتبات، جامعة الملك سعود، الرياض.

بيشتز، سيمور (١٩٧٤م). سلسلة ملخصات شوم في الاحتمالات. لندن: ماكروهيل للنشر، ترجمة سامح داوود، ومراجعة: عبدالعظيم أنيس. دار المريخ، الرياض.

الصياد، جلال مصطفى (١٤٠٨هـ) نظرية الاحتمالات. دار الشروق، جدة.

كنجو، أنيس (١٤١٣هـ) الإحصاء والاحتمال، الطبعة الأولى، عمادة شؤون المكتبات، جامعة الملك سعود، الرياض.

مصطفى، مدني دسوقي (١٩٧٩م) مبادىء في نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي. دار النهضة العربية، القاهرة.

هويل، كيول ج (١٩٨٤م). المبادىء الأولية في الإحصاء، الطبعة الثانية، ترجمة عبدالوهاب، بدرية شوقي؛ الشربيني، محمد كامل. دار جون وايلي وأبنائه، نيويورك.

ثانيا: المراجع الأجنبية

Bickel, P. and Dockson, K. (1977). *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics.* Okland, California, Holden-Day, Inc.

Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure.* Second ed. New York, John Wiley and Sons.

Chung, K.L. (1974). *A Course in Probability Theory.* Second ed. New York, Academic Press.

Chung, K.L. (1974). *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes*, New York, Springer-Verlag.

Clarke, A.B. and Disney. (1985). *Probability and Random Processes: A First Cource with Applications.* New York, John Wiley and Sons.

De Groot, M. (1975). *Probability and Statistics.* Menlo Park, California, Addison Wesley Publishing Company, Inc.

Fabian, V. and Hannan, J. (1985). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* New York, John Wiley and Sons.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Third ed. New York, John Wiley and Sons.

Hoel, P.G. (1984). *Introduction and Mathematical Statistics.* Fifth ed. New York, John Wiley and Sons.

Hogg, R. and Craig, A.T. (1978). *Introduction and Mathematical Satistics.* Fourth ed. New York, MacMillan Publishing Company.

Hogg, R. and Elliot, T. (1988). *Probability and Statistical Inference.* Third ed. New York, MacMillan Publishing Company.

Johnson, N.; Kotz, S. and Kemp, A.W. (1992). *Univariate Discrete Distribution.* Second ed. New York, John Wiley and Sons.

Kreyszig, E. (1970). *Introductory Mathematical Statistics: Principles and Methods.* New York, John Wiley and Sons.

Larson, H.J. (1973). *Introduction to Probability and Statistics.* New York, John Wiley and Sons.

Mendenhall, W. (1979). *Introduction to Probability and Statistics.* Fifth ed. North Scitvate Mass, Duxbury Press.

Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. (1974). *Introduction to Theory of Statistics.* Third ed. McGraw-Bill Inc.

Rohatgi, V. (1976). *An Introduction Probability Theory and Mathematical Statistical.* New York, John Wiley and Sons.

Rohatgi, V. (1984). *Statistical Inference.* New York, John Wiley and Sons.

Roozanov, Y.A. (1969). *Probability Theory: A Concise Course,* New York, Dover Publications, Inc.

Ross, S. (1988). *A First Course in Probability.* Fourth Ed. New York, MacMillan Publishing Company.

Strait, P.T. (1983). *Probability and Statistics with Applications.* New York, Harcaurt Brace Jovanovich Inc.

Vspensky, J.V. (1937). *Introduction to Mathematical Probability.* First Ed. New York, McGraw-Hill Company.,

ثبت المصطلحات

أولا: عربي - إنجليزي

أ

اتحاد	union
احتمال	probability
احتمال شرطي	conditional probability
احتمال كلي	total distribution
احداثيات التوزيع الطبيعي	ordinates of normal distribution

ت

تباين	variance
تباين متغيرين	variance of two variables
تباين مجموع أو طرح متغيرين	variance of sum difference
تجربة	experiment
تجربة عشوائية	random experiment
تجزيء المجموعة	partition of set
تغاير	covariance
تغاير متغيرين عشوائيين	covariance of two random variables
تقاطع	intersection
تقريب بواسون لتقريب طبيعي	normal approximation to the poisson distribution
تقريب بواسون لتوزيع ذي حدين	Poisson approximation of the binomial

تقريب ذي الحدين لتوزيع طبيعي	normal approximation to the binomial
توزيع	distribution
توزيع أسي	exponential distribution
توزيع بيتا	beta distribtution
توزيع بواسون التكراري	Poisson frequency distribution
توزيع بواسون الاحتمالي	Poisson probability distribution
التوزيع التكراري لذي الحدين	binomial frequency distribution
توزيع جاما	gama distribution
توزيع ذو الحدين الاحتمالي	negative probability distribution
توزيع ذي الحدين السالب الاحتمالي	negative binomial distribution
توزيع طبيعي	normal distribution
توزيع طبيعي قياسي	standard normal distribution
توزيع عدة متغيرات	multinomial distribution
توزيع فوق الهندسي الاحتمالي	hyper geometric probability distribution
توزيع متصل	continuous distribution
توزيع مشترك	joint distribution
توزيع منفصل	discrete
توزيع هامشي	marginal distribution
توزيع الهندسي	geometric distribution
توقع رياضي	mathematical expectation
توقع رياضي لدالة متغير عشوائي	expectation of a function of random variable
توقع رياضي لمتغير عشوائي	mathematical expectation of random bariable



جبر المجموعة	algebra set
جبر بوريل	borel algebra

ح

event	حادثة
simple event	حادثة بسيطة
sure event	حادثة مؤكدة
mutually exclusive event	حادثة متنافية
compount event	حادثة مركبة
impossible event	حادثة مستحيلة
independent event	حوادث مستقلة

د

function	دالة
probability function	دالة الاحتمال
conditional probability function	دالة الاحتمال الشرطية
joint probability function	دالة الاحتمال المشتركة
beta function	دالة بيتا
comulant generating function	دالة التراكمات
distribution function	دالة التوزيع
cumulative distribution function	دالة التوزيع التراكمية
bivariate distribution function	دالة التوزيع الثنائية
distribution function of contin random variable	دالة التوزيع لمتغير عشوائي متصل
distribution function of discrete random variable	دالة التوزيع لمتغير عشوائي منفصل
joint distribution function	دالة التوزيع المشتركة
gama function	دالة جاما
mass function	دالة كتلة
density function	دالة كثافة
characteristic function	دالة مميزة

دالة مولدة للعزوم moment generating function

دالة التوزيع لمتغير عشوائي متصل distribution function of contin random variable

دوال على المجموعة sets function

ع

عزم حول الوسط الحسابي moment about arithmetic mean

عزم حول وسط فرض moment about arbirary point

عزوم moments

عزوم حول الصفر moment about zero

علاقة relation

علاقة بييز Baye's relation

عملية بواسون Poisson process

عمليات على المجموعة operation on set

ف

فراغ الاحتمال probability space

فراغ العينة sample space

فرق difference

فصل class

فصول المجموعة class set

م

متسلسل series

متغير عشوائي random variable

متغير عشوائي متصل continuous random variable

متغير عشوائي منفصل discrete random variable

متغيرات عشوائية مستقلة independent random variable

متوازي parallel

مجموعة set

مجموعة جزئية	subset
مجموعة خالية	empty set
مجموعة مكملة	complement set
مجموعة منتهية	finite set
محاولات متكررة	repeated trials
مساحة	areas
مساحة تحت المنحنى الطبيعي	areas of normal distribution
مطابقة	fitting
معادلات تفاضلية فرقية	difference differential equations
معامل الارتباط	correlation coefficient
معامل الالتواء	kewness coefficient
معامل التفرطح	kurtosis coefficient
معدل	rate
معدل فشل (إخفاق)	failure rate
منوال	mode

ن

نظام صف انتظار	queuing
نظام متتال	series system
نظام متواز	parallel system
نظام الموثوقية	reliability theory
نظام عينة	sample point

ثانيا: إنجليزي - عربي

A

algebra set	جبر المجموعة
areas	مساحة
areas of normal distribution	مساحة تحت المنحنى الطبيعي

B

Baye's relation	علاقة بييز
beta distribtution	توزيع بيتا
beta function	دالة بيتا
binomial frequence distribution	التوزيع التكراري لذي الحدين
bivariate distribution function	دالة التوزيع الثنائية
borel algebra	جبر بوريل

C

characteristic function	دالة مميزة
class	فصل
class set	فصول المجموعة
complement set	مجموعة مكملة
compount event	حادثة مركبة
conditional probability	احتمال شرطي
conditional probability function	دالة الاحتمال الشرطية
continuous distribution	توزيع متصل
continuous random variable	متغير عشوائي متصل
correlation coefficient	معامل الارتباط
covariance	تغاير
covariance of two random variables	تغاير متغيرين عشوائيين
cumulative distribution function	دالة التوزيع التراكمية

D

density function	دالة كثافة
difference	فرق
difference differential equations	معادلات تفاضلية فرقية
discrete	توزيع منفصل
discrete random variable	متغير عشوائي منفصل
distribution	توزيع
distribution function	دالة التوزيع
distribution function of contin random variable	دالة التوزيع لمتغير عشوائي متصل
distribution function of discrete random variable	دالة التوزيع لمتغير عشوائي منفصل

E

empty set	مجموعة خالية
event	حادثة
expectation of a function of random variable	توقع رياضي لدالة متغير عشوائي
experiment	تجربة
exponential distribution	توزيع أسي

F

failure rate	معدل فشل (إخفاق)
finite set	مجموعة منتهية
fitting	مطابقة
function	دالة

G

gama distribution	توزيع جاما
gama function	دالة جاما
geometric distribution	توزيع الهندسي

H

hyper geometric probability distribution	توزيع فوق الهندسي الاحتمالي

I

impossible event	حادثة مستحيلة
independent event	حوادث مستقلة
independent random variable	متغيرات عشوائية مستقلة
intersection	تقاطع

J

joint distribution	توزيع مشترك
joint distribution function	دالة التوزيع المشتركة
joint probability function	دالة الاحتمال المشتركة

K

kewness coefficient	معامل الالتواء
kurtosis coefficient	معامل التفرطح

M

marginal distribution	توزيع هامشي
mass function	دالة كتلة
mathematical expectation	توقع رياضي
mathematical expectation of random bariable	توقع رياضي لمتغير عشوائي
mode	منوال
moment about zero	عزوم حول الصفر
moment about arbitrary point	عزم حول وسط فرض
moment about arithmetic mean	عزم حول الوسط الحسابي
moment generating function	دالة مولدة للعزوم
moments	عزوم
multinomial distribution	توزيع عدة متغيرات

mutually exclusive event — حادثة متنافية

N

negative binomial distribution — توزيع ذي الحدين السالب الاحتمالي

normal approximation to the binomial — تقريب ذي الحدين لتوزيع طبيعي

normal approximation to the poisson distribution — تقريب بواسون لتقريب طبيعي

normal distribution — توزيع طبيعي

O

operation on set — عمليات على المجموعة

ordinates of normal distribution — احداثيات التوزيع الطبيعي

P

parallel — متوازي

partition of set — تجزيء المجموعة

Poisson approximation of the binomial — تقريب بواسون لتوزيع ذي حدين

Poisson frequency distribution — توزيع بواسون التكراري

Poisson probability distribution — توزيع بواسون الاحتمالي

Poisson process — عملية بواسون

probability — احتمال

probability function — دالة الاحتمال

probability space — فراغ الاحتمال

Q

queuing — نظام صف انتظار

R

random experiment — تجربة عشوائية

random variable — متغير عشوائي

rate — معدل

relation — علاقة

repeated trials	محاولات متكررة

S

sample space	فراغ العينة
series	متسلسل
series system	نظام متتال
set	مجموعة
simple event	حادثة بسيطة
standard normal distribution	توزيع طبيعي قياسي
subset	مجموعة جزئية
sure event	حادثة مؤكدة

T

total distribution	احتمال كلي

U

union	اتحاد

V

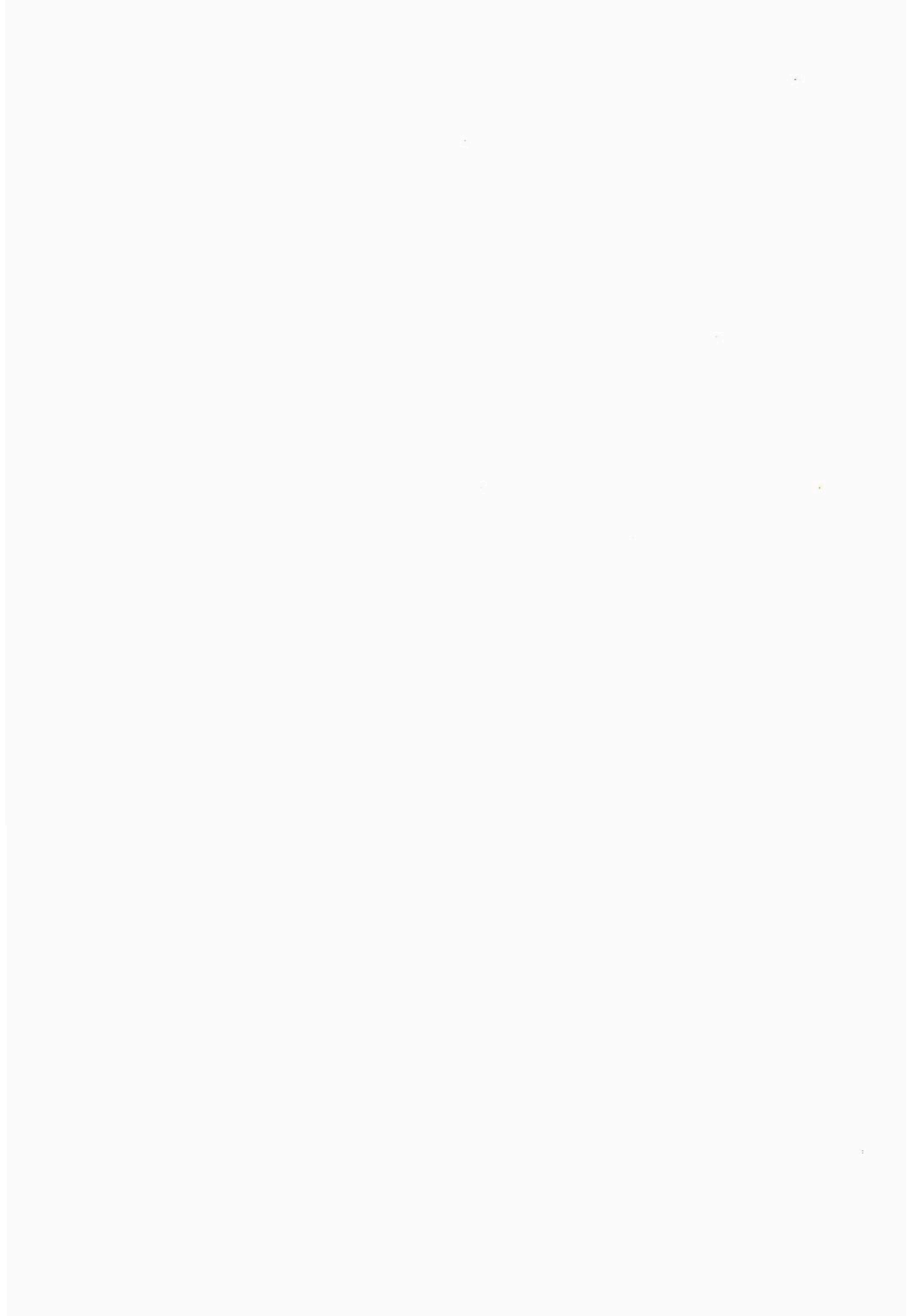
variance	تباين
variance of sum difference	تباين مجموع أو طرح متغيرين
variance of two variables	تباين متغيرين

كشاف الموضوعات

أ

ت

ن





ردمك : ٠-٥٥-٣٧-٩٩٦٠
ISBN:9960-37-55-0